最小二乘法的若干问题
——线性代数的应用

陶本藻

在近代最小二乘法的论证上及其应用方面，愈来愈多地应用了线性代数理论和计算方法以及数理统计的知识，使最小二乘法的数学与现代数学理论和计算技术联系起来，这不仅丰富了这门应用数学，而且也扩大了其应用的范围。

线性代数在最小二乘法中的应用范围很广，研究这方面内容的文献很多。本文主要是从测量平差的观点出发，运用线性代数有关知识来论述最小二乘法理论中的若干问题。

一、最小二乘法原理与欧氏空间

测量平差问题中的误差方程组，其一般形式可用一个矢量方程来表示：

$$L = ax_1 + bx_2 + \cdots + gx_t + v \qquad (1\cdot1)$$

其中 a、b、g、L、v 均为 n 维矢量：

$$a = (a_1\ a_2 \cdots a_n),\quad b = (b_1\ b_2 \cdots b_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,\quad g = (g_1\ g_2 \cdots g_n),$$

$$L = (L_1\ L_2 \cdots L_n),\quad v = (v_1\ v_2 \cdots v_n),$$

$x_j(j=1, 2, \cdots, t)$ 为纯量因子。设矢量 a、b、…、g 属于欧几里德空间，因为，平差时误差方程系数阵的秩必为 t，即矢量 a、b、…、g 线性无关，故可由这些矢量为基组成 n 维欧几里德空间内的一个子空间 S'，

由线性空间理论知道，（1·1）右端的线性组合

$$ax_1+bx_2+\cdots+gx_t=\widetilde{L} \qquad (1\cdot2)$$

也属于S′。$\widetilde{L}$也是矢量，称为估计矢量，S′相应称为估计空间。

将（1·2）式代入（1·1）式，得

$$L=\widetilde{L}+v \qquad (1\cdot3)$$

可见，只有当$v=0$时，$L=\widetilde{L}$，观测值矢量L才属于估计空间S′，否则L是不属于该空间的。

按最小二乘法原理，要求矢量v的内积

$$(v,v)=[vv]=最小$$

即

$$(L-\widetilde{L},L-\widetilde{L})=最小 \qquad (1\cdot4)$$

这个式子表明，在多维几何中的最小二乘法原理，就是要求观测值矢量L的端点到估计向矢$\widetilde{L}$的端点距离的平方要最短，也就是要求矢量v与估计矢量$\widetilde{L}$或者说与估计空间S′正交。

如果矢量v与S′正交，则矢量v亦必与属于S′的矢量a、b、…、g两两正交。按欧几里德空间定义内积的方法，得

$$\left.\begin{array}{l}(a,v)=0\\(b,v)=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\(g,v)=0\end{array}\right\} \qquad (1\cdot5)$$

将（1·1）式代入，即得法方程组

$$\left.\begin{array}{l}(a,a)x_1+(a,b)x_2+\cdots+(a,g)x_t=(a,L)\\(a,b)x_1+(b,b)x_2+\cdots+(b,g)x_t=(b,L)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(a,g)x_1+(b,g)x_2+\cdots+(g,g)x_t=(g,L)\end{array}\right\} \qquad (1\cdot6)$$

上面是应用线性代数中欧氏空间的概念来讨论按最小二乘法作测量

平差的问题。从误差方程至法方程的推导比较直观而且推导的过程比较简短。同时也给出了最小二乘法的几何解释，这就是将观测值矢量L分解为属于估计空间S′的估计矢量$\tilde{L}$及与之垂直的改正数矢量v，求得的未知数估值$x_1, x_2, \cdots, x_t$所组成的估计矢量$\tilde{L}$应该是观测值矢量L在估计空间S′上的正射影。

法方程组（1·6）中的系数阵是满秩的，而且在系数阵的左上角的1阶，2阶，…t阶子式都大于零，即

$$(a,a)=[aa]>0,\quad \begin{vmatrix}(a,a)&(a,b)\\(a,b)&(b,b)\end{vmatrix}=[aa][bb\cdot1]>0\cdots\cdots$$

$$\begin{vmatrix}(a,a)&(a,b)&\cdots&(ag)\\(a,b)&(b,b)&\cdots&(bg)\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\(a,g)&(b,g)&\cdots&(g,g)\end{vmatrix}=[aa][bb\cdot1]\cdots[gg\cdot t-1]>0$$

故法方程的系数阵为对称正定阵。这是研究法方程解法的一个很有用的特性。

由（1·3）式知

$$(L,L)=(\tilde{L}+v,\tilde{L}+v)=(\tilde{L},\tilde{L})+(v\ \ v)+2(\tilde{L},v)$$

因为$(\tilde{L},v)=0$　（见1·5式）故有

$$(L,L)=(\tilde{L},\tilde{L})+(v,v)\qquad(1\cdot7)$$

在欧几里得空间内矢量α的模或长定义为

$$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}\qquad(1\cdot8)$$

故（1·7）式可改写成

$$\|L\|^2=\|\tilde{L}\|^2+\|v\|^2\qquad(1\cdot9)$$

此即为商高定理的推广。

在测量平差中已推得$[vv]$的计算公式为

$$[vv]=[LL]-([aL]x_1+[bL]x_2+\cdots+[gL]x_t)$$

将上式与(1·7)式相对照，即知估计矢量$\widetilde{L}$的模为

$$\|\widetilde{L}\|=([aL]x_1+[bL]x_2+\cdots+[gL]x_t)^{\frac{1}{2}} \qquad (1\cdot10)$$

二 高斯格式与消元问题

设有系数对称阵相同的两个方程

$$AX+B=0 \qquad (2\cdot1)$$

$$AY+C=0 \qquad (2\cdot2)$$

其中A的行列式$|A|\neq0$，即A为满秩阵，由(2·1)、(2·2)式可解得

$$X=-A^{-1}B \qquad (2\cdot3)$$

$$Y=-A^{-1}C \qquad (2\cdot4)$$

将(2·2)式中常数项C转置后左乘(2·3)式两端，得

$$C^TX=-C^TA^{-1}B=-(A^{-1}C)^TB$$

顾及(2·4)式，得

$$C^TX=Y^TB$$

或

$$C^TX=B^TY \qquad (2\cdot5)$$

这样，一次式C^TX的计算，可用另一个一次式B^TY的计算来代替，而不必直接求方程(2·1)的解。这种问题在线性代数中称为消元问题。

(2·5)式表明方程组(2·1)的未知数与方程组(2·2)常数项的乘积和与方程组(2·2)的未知数与方程组(2·1)常数项的乘积和相等，这就是测量平差中所谓的对称线性方程组第二特性[5]。

消元问题在平差计算中是经常用到的，平差中的主要公式大都属于这种一次型式。例如

间接平差的主要公式（矩阵符号见〔6〕§3）为

$$\left.\begin{aligned} &-\delta X=QW \\ &V^{T}V=\ell^{T}\ell+W^{T}\delta X \\ &-\frac{1}{p_z}=-F^{T}q \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot6)$$

条件平差的主要公式（〔6〕§4）为

$$\left.\begin{aligned} &-K=QW \\ &-V^{T}V=W^{T}K \\ &\frac{1}{p_z}=F^{T}F+(aF)^{T}q \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot7)$$

综合以上公式，我们以下列一次式的一般形式表示：

$$F=d+C^{T}X \qquad (2\cdot8)$$

式中d为纯量，C、X为列矢量。根据消元问题，可按下述矩阵变换方法计算F值。

作矩阵

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C^{T} & d \end{pmatrix} \qquad (2\cdot9)$$

其中（A　B）为方程（2·1）的增广阵，C^{T}为方程（2·2）中C的转置，（2·8）中的系数阵，d为（2·8）的常数。现对矩阵（2·9）作初等变换，即左乘如下矩阵

$$\begin{pmatrix} E & O \\ Y^{T} & 1 \end{pmatrix} \qquad (2\cdot10)$$

式中E为与A同阶的单位阵，Y^{T}为方程（2·2）中Y的转置，可求得其积为

$$\begin{pmatrix} E & O \\ Y^{T} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C^{T} & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ Y^{T}A+C^{T} & Y^{T}B+d \end{pmatrix}$$

顾及（2·2）、（2·5）和（2·8）式，上式即为

$$\begin{pmatrix} E & O \\ Y^{T} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C^{T} & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ O & F \end{pmatrix} \qquad (2\cdot 11)$$

上述推导说明，为求函数F之值，在已知Y时（Y为方程（2·2）的解），可通过对（2·9）左乘一三角阵（2·10）而求得。但是，一般Y并不知道。事实上，从（2·11）式可以看出，为求F之值可以不利用Y值，只要设法对矩阵（2·9）作一系列初等变换，使变换后其左下角（C^{T}的位置上）元素全为零，在这种情况下，右下角（d的位置上）元素就是所需要的F值。

根据上述理论，在间接平差时，求$V^{T}V$的初始格式和变换后的格式为

$$\begin{pmatrix} A & W \\ W^{T} & l^{T}l \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & W \\ O & V^{T}V \end{pmatrix}$$

求权倒数$\frac{1}{p_z}$的格式为

$$\begin{pmatrix} A & -F \\ -F^{T} & O \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & -F \\ O & -\frac{1}{p_z} \end{pmatrix}$$

式中$-F$为转换系数方程$Aq-F=O$的常数项。

求未知数$-\delta X$的格式为

$$\begin{pmatrix} A & -E \\ W^{T} & O \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & -E \\ O & -\delta X \end{pmatrix}$$

式中$-E$为方程$AQ-E=O$中常数项。

综合上面几种变换后的格式为

$$\begin{pmatrix} A & W & -F & -E \\ O & V^{T}V & -\frac{1}{p_z} & -\delta X \end{pmatrix} \qquad (2\cdot 12)$$

这个格式实际上就是运用高斯约化法（或平方根法）在高斯约化表（或

平方根表）中配置的内容和计算的结果。这是因为高斯约化（或平方根法）的实质就是对初始的矩阵进行初等变换（〔6〕§5）。变换的结果其左下角元素为零，也可以说其理论就是消元问题。

条件平差的格式与上述类同。

因此，在最小二乘法中，如果运用线性代数中消元问题的理论，就能直观地说明高斯格式（或平方根表）的计算规律，而且可以避免繁琐的推导过程。

三 逐次约化与正交化变换

设有一满秩阵

$$\underset{rn}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

将其分解为两个矩阵之积

$$\underset{rn}{A}=\underset{rr}{T}\ \underset{rn}{H} \tag{3·1}$$

其中T为r阶下三角方阵，H为$r\times n$阶矩阵，即

$$\underset{rr}{T}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{r1} & t_{r2} & \cdots & 1 \end{pmatrix},\quad \underset{rn}{H}=\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{r1} & h_{r2} & \cdots & h_{rn} \end{pmatrix} \tag{3·2}$$

並规定矩阵H中行矢量两两正交，即

$$(h^{(i)},\ h^{(j)})=0 \qquad i\neq j \tag{3·3}$$

式中

$$h^{(i)}=(h_{i1}\ \ h_{i2}\cdots h_{in})$$

具有这种性质的矩阵H称为行矢量正交的矩阵。从线性代数中矩阵分解的理论知道，符合上述规定的分解是可行的，而且T、H阵中的元素能唯一确定。

若令A中i行的行矢量记为$a^{(i)}$，则（3·1）式可改写成

$$\begin{pmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \\ \cdots\cdots \\ a^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ t_{21} & 1 & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{r1} & t_{r2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^{(1)} \\ h^{(2)} \\ \cdots\cdots \\ h^{(r)} \end{pmatrix} \qquad (3\cdot4)$$

解之，得

$$\left.\begin{aligned} & a^{(1)} = h^{(1)} \\ & a^{(2)} = t_{21} h^{(1)} + h^{(2)} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & a^{(r)} = t_{r1} h^{(1)} + t_{r2} h^{(2)} + \cdots + h^{(r)} \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot5)$$

顾及条件（3·3）式，由上式可得下列内积式为

$$\left.\begin{aligned} & (a^{(2)}, h^{(1)}) = t_{21}(h^{(1)}, h^{(1)}) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & (a^{(r)}, h^{(1)}) = t_{r1}(h^{(1)}, h^{(1)}) \\ & (a^{(r)}, h^{(2)}) = t_{r2}(h^{(2)}, h^{(2)}) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot6)$$

或简写成

$$t_{ij} = \frac{(a^{(i)}, h^{(j)})}{(h^{(j)}, h^{(j)})} \qquad (3\cdot7)$$

由（3·5）、（3·7）式可见，利用这两个式子由A的元素可唯一的确定T、H中各元素值。

将上述理论应用到最小二乘法中来，说明平差的某些理论和实际计

算很有益处。

在条件平差时，设有条件方程的系数阵为（以 $r=3$ 为例）：

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

按（3·5）和（3·7）式计算，可得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{[ab]}{[aa]} & 1 & 0 \\ \dfrac{[ac]}{[aa]} & \dfrac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \cdots & a_n \\ b_1\cdot 1 & b_2\cdot 1 \cdots & b_n\cdot 1 \\ c_1\cdot 2 & c_2\cdot 2 \cdots & c_n\cdot 2 \end{pmatrix} \tag{3·8}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} b_i\cdot 1 &= b_i-\frac{[ab]}{[aa]}a_i \\ c_i\cdot 2 &= c_i-\frac{[ac]}{[aa]}a_i-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}(b_i\cdot 1) \end{aligned}\right\} \tag{3·9}$$

称为条件方程的约化系数。

将（3·8）式两端左乘以 T^{-1}，得

$$H=T^{-1}A \tag{3·10}$$

由逆阵定义式

$$TT^{-1}=E \tag{3·11}$$

可求得

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{[ab]}{a[aa]} & 1 & 0 \\ -\dfrac{[ac]}{[ca]}+\dfrac{[ab]}{[ac]}\dfrac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} & -\dfrac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} & 1 \end{pmatrix} \tag{3·12}$$

这就是说。如果将条件方程系数阵左乘以T^{-1}，就能变换成行矢量正交的矩阵H。

令矢量

$$\left.\begin{aligned} a&=(a_1 \quad a_2 \cdots a_n)\\ b\cdot 1&=(b_1\cdot 1 \quad b_2\cdot 1\cdots b_n\cdot 1)\\ c\cdot 2&=(c_1\cdot 2 \quad c_2\cdot 2\cdots c_n\cdot 2)\end{aligned}\right\} \tag{3·13}$$

则由H阵的性质知

$$\left.\begin{aligned} (a,\ b\cdot 1)&=0\\ (a,\ c\cdot 2)&=0\\ (b\cdot 1\ \ c\cdot 2)&=0\end{aligned}\right\} \tag{3·14}$$

实际上。从(3·9)式亦可看出上式是成立的。这些式子说明了平差中条件方程约化系数的性质。

设原条件方程为

$$AV+W=0 \tag{3·15}$$

作变换。对上式两端左乘以T^{-1}得

$$T^{-1}AV+T^{-1}W=0$$

或

$$HV+(T^{-1}W)=0 \tag{3·16}$$

此时条件方程系数行矢量两两正交。从(3·15)至(3·16)的过程称为条件方程正交化变换。经正交化变换后的条件方程是彼此独立的。这是因为由条件(3·16)组成的法方程

$$HH^TK+(T^{-1}W)=0 \tag{3·17}$$

其系数阵是对角型的，即

$$HH^T=\begin{pmatrix}(a,\ a) & 0 & 0\\ 0 & (b\cdot 1,\ b\cdot 1) & 0\\ 0 & 0 & (c\cdot 2,\ c\cdot 2)\end{pmatrix} \tag{3·18}$$

因此，条件（3·16）可单独解算。

上述说明，通过对条件方程作正交化变换，从测量平差观点看，就是对条件方程进行逐次约化，其结果是一组彼此独立的条件方程，达到分组平差目的，这就是所谓的逐一分组条件平差法。

同样，在间接平差时，也能对误差方程进行正交化变换，即约化误差方程，达到分组平差的目的。

设误差方程的一般形式为

$$V = AX + \ell \tag{3·19}$$

将转置后的系数 A^T 进行分解

$$A^T = TH \tag{3·20}$$

矩阵 T、H 的规定与前述同。将上式代入（3·19）式得

$$V = (TH)^T X + \ell = H^T T^T X + \ell$$

作未知数代换，令

$$Y = T^T X \tag{3·21}$$

上面的误差方程写成

$$V = H^T Y + \ell \tag{3·22}$$

此时，误差方程系数阵为 H^T，按 H 的定义，H^T 为列矢量正交的矩阵，亦即经过上述变换，所得到的是列矢量彼此正交的误差方程。从 A 变换至 H^T 称为误差方程正交化，或称为约化误差方程，由此组成的法方程

$$HH^T Y + H\ell = 0 \tag{3·23}$$

其系数阵为对角型的（3·18）。

因为 T 是下三角阵（3·8），故 T^T 为上三角阵，由（3·23）解出 Y 后，可方便地按（3·21）式回代求出未知数 X。

上述通过误差方程正交化或约化误差方程的方法，达到未知数单独平差，这种平差方法，我们称为未知数逐一平差法。

通过对条件方程（或误差方程）的正交化变换组成的法方程，其方

程组的稳定性〔10〕是较高的。有的文献提出，进行上述正交化变换，是改善方程组稳定性（或制约性）的一个途径。我们曾在〔10〕中提出过对此问题的看法，这仍是一个值得研究的问题。

四 函数方差最小与估计理论

按最小二乘法进行测量平差，求得的未知数任一线性函数的方差为最小，或者说函数的权为最大。这就是最小方差原理或称最大权原理。最小方差原理与最小二乘原理实际是互相统一的，它们是从不同的方面着手研究，最后的平差结果完全一致。在文献〔11〕中，仅就直接平差情况对上述问题作了说明，但更普遍的证明一般测量平差书籍中是少见到的。文献〔2〕的作者，运用了线性估计理论证明了按最小二乘法求得的函数估值，具有最优无偏的性质，实际上也就证明了最小方差原理。

我们按照〔2〕中介绍的线性估计理论，运用矩阵来证明按最小二乘法求得的任一线性函数的方差为最小，其推导过程要比文献〔2〕简明。

设有观测方程和未知量的任一线性函数为

$$\underset{n1}{L}=\underset{nt}{A}\ \underset{t1}{X}+\underset{n1}{\Delta} \qquad (4\cdot1)$$

$$\underset{11}{G}=\underset{1t}{F^{T}}\ \underset{t1}{X} \qquad (4\cdot2)$$

式中X为未知量真值列矢量，L为观测值列矢量，Δ为观测值真误差列矢量，F为系数列矢量，A为系数阵，根据测量的性质，Δ_i是互相独立的无偏的随机变量，为讨论问题方便起见，这里假设它们是同精度的，用数学式子表示，就是Δ的数学期望

$$E(\Delta)=0 \qquad (4\cdot3)$$

以及Δ的协方差矩阵V(Δ)是对角阵，而且对角阵元素均为Δ_i的方差σ^2，即

$$V(\Delta)=I\sigma^2 \qquad (4\cdot4)$$

I 表示单位矩阵。

不论用何种计算方法，由观测数据不可能求得未知量之一线性函数的真值G，而只能得到它的估值g。设由观测值L算得的估值为

$$g_{11}=\alpha^T L \qquad (4\cdot5)$$

α为用某种方法确定的系数列矢量。采用的计算方法不同，其α也不相同。

根据线性估计理论，要求g必须是真值G的无偏估计亦即要求g的数学期望就是G，即

$$E(g)=G \qquad (4\cdot6)$$

将(4·5)、(4·1) 式代入上式得

$$G=E(\alpha^T L)=\alpha^T E(L)=\alpha^T E(AX+\Delta)$$
$$=\alpha^T AE(X)+\alpha^T E(\Delta)$$

因为$E(X)=X$，$E(\Delta)=0$，故上式为

$$G=\alpha^T AX$$

与(4·2)式对照，即知

$$\underset{1n}{\alpha^T}\underset{nt}{A}=\underset{1t}{F^T} \qquad (4\cdot7)$$

也就是说，如果g是G的无偏估值，则(4·5)式中的α必须满足条件(4·7)。

从上述理论的观点，作为一种平差方法，α必须满足这个条件。否则(4·5) 式不能称为平差法的公式。但从方程(4·7) 知道，一般$n\neq t$，故α的解不是唯一的，亦即G的无偏估值是多解的。在这些多值解中，线性估计理论提出了另一个要求，即要求取其中方差为最小的作为G的估值，满足这个要求的估值，称为最优无偏估值。用数学式子表示为

$$V(g)=min \qquad (4\cdot8)$$

将（4·5）式代入，按方差运算规则可得

$$V(g)=V(\alpha^T L)=\alpha^T V(L)\alpha$$

因为V（L）=V（Δ），由（4·4）式知

$$V(L)=I\sigma^2 \tag{4·9}$$

代入上式得

$$V(g)=\alpha^T\alpha\sigma^2=min \tag{4·10}$$

按最小二乘法进行测量平差，其结果是满足上述两个条件的，下面进行证明。

设误差方程为

$$L=Ax+v \tag{4·11}$$

x为由最小二乘法所得的估値，v为改正数列矢量。其法方程为

$$Nx=W \tag{4·12}$$

式中

$$N=A^TA \qquad W=A^TL \tag{4·13}$$

由此解得

$$x=N^{-1}W=QW \tag{4·14}$$

Q为法方程系数的逆阵。

按最小二乘法对（4·2）作估计，其估値为

$$g=F^Tx \tag{4·15}$$

将（4·14）、（4·13）式代入上式得

$$g=F^TQW=F^TQA^TL \tag{4·16}$$

将上式与（4·5）对照，两者形式相同，令

$$\tilde{\alpha}^T=F^TQA^T \tag{4·17}$$

它就是由最小二乘法求得的α值。

因为

$$\tilde{\alpha}^TA=F^TQA^TA=F^TQN=F^T \tag{4·18}$$

故$\tilde{\alpha}$满足条件（4·7）式。

现设按其它方法求得的系数值记为$\bar{\alpha}$，它亦满足（4·7）式，则有

$$\bar{\alpha}^{T}A = F^{T} \tag{4·19}$$

将（4·19）式减去（4·18）式得

$$(\bar{\alpha}^{T}-\tilde{\alpha}^{T})A = 0$$

将上式转置，并左乘以$F^{T}Q$得

$$F^{T}QA^{T}(\bar{\alpha}-\tilde{\alpha})=0$$

顾及（4·17）式，上式为

$$\tilde{\alpha}^{T}(\bar{\alpha}-\tilde{\alpha}) = 0 \tag{4·20}$$

于是有

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}^{T}\bar{\alpha} &= \{(\bar{\alpha}-\tilde{\alpha})+\tilde{\alpha}\}^{T}\{(\bar{\alpha}-\tilde{\alpha})+\tilde{\alpha}\}\\ &=(\bar{\alpha}-\tilde{\alpha})^{T}(\bar{\alpha}-\tilde{\alpha})+\tilde{\alpha}^{T}(\bar{\alpha}-\tilde{\alpha})+\\ &\quad+(\bar{\alpha}-\tilde{\alpha})^{T}\tilde{\alpha}+\tilde{\alpha}^{T}\tilde{\alpha}\end{aligned}$$

顾及（4·20）式，上式可写成

$$\bar{\alpha}^{T}\bar{\alpha}=(\bar{\alpha}-\tilde{\alpha})^{T}(\bar{\alpha}-\tilde{\alpha})+\tilde{\alpha}^{T}\tilde{\alpha}\geqslant\tilde{\alpha}^{T}\tilde{\alpha} \tag{4·21}$$

上式表明，用任何其它平差方法而得的$\bar{\alpha}$，其$\bar{\alpha}^{T}\bar{\alpha}$之值总是大于按最小二乘法平差求得的$\tilde{\alpha}^{T}\tilde{\alpha}$之值，只有当$\bar{\alpha}=\tilde{\alpha}$时，才$\bar{\alpha}^{T}\bar{\alpha}=\tilde{\alpha}^{T}\tilde{\alpha}$。这就证明了按最小二乘法平差计算得到的$\tilde{\alpha}$值满足条件（4·10），而且它是唯一解。

因此可以得到结论，按最小二乘法求出的未知量及其任一线性函数是最优的无偏估值，其函数的方差为最小。这就普遍地证明了测量平差中的最小方差原理或最大权原理。

参 考 文 献

〔1〕 复旦大学数学系：线性代数

上海科技出版社　1960年

〔2〕〔日〕 森口繁一：统计分析（中译本）

上海科技出版社　1961年

〔3〕〔苏〕 Д.И.希洛夫：矩阵和矢量在最小二乘法中的应用

测绘译丛　1963年4期

〔4〕〔苏〕 法捷也娃：线性代数计算法（中译本）

科学出版社　1958年

〔5〕 武汉测绘学院大地测量系：测量平差基础

测绘出版社　1978年

〔6〕 陶本藻：矩阵在测量平差中的应用

测绘通报　1963年1、2、3期

〔7〕 Д.К.ФАДДЕЕВ В.Н.ФАДДЕЕВА：Вычислительные Методы линейной алгебры　1963年

〔8〕 Б.П.ДЕМИДОВИЧ.И.А.МАРОН：Основы Вычислительной Математики　1960年

〔9〕 Ю.В.ЛИННИК： МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ И ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБРАБОТКИ НАБЛЮДЕНИЙ　1962年

〔10〕崔希璋　陶本藻　刘大杰：论法方程的制约性

武汉测绘学院专刊　1966年1期

〔11〕武汉测绘学院最小二乘法教研组：最小二乘法

中国工业出版社　1961年