武昌区 2016 届高三年级五月调研考试

文科数学试题及答案

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．设集合 $A=\{x\,|\,x^2\le x\}$， $B=\{-1,0,1\}$，则集合 $A\cap B$ 的子集共有（ C ）

A．2 个　　B．3 个　　C．4 个　　D．8 个

2．若复数 $(m^2+\mathrm{i})(1+m\mathrm{i})$ 是实数，则实数 $m=$(B)

A．1　　B．-1　　C．$\sqrt{2}$　　D．$-\sqrt{2}$

3．若变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} y\le 2x, \\ x+y\le 1, \\ y\ge -1, \end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最大值是(C)

A．$-\dfrac{5}{2}$　　B．0　　C．$\dfrac{5}{3}$　　D．$\dfrac{5}{2}$

4．若某公司从五位大学毕业生甲、乙、丙、丁、戊中录用三人，这五人被录用的机会均等，则甲或乙被录用的概率为(D)

A．$\dfrac{2}{3}$　　B．$\dfrac{2}{5}$　　C．$\dfrac{3}{5}$　　D．$\dfrac{9}{10}$

5．已知抛物线 $y^2=8x$ 的准线过双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一个焦点，且双曲线的一条渐近线方程为 $\sqrt{3}x+y=0$，则该双曲线的方程为(B)

A．$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$　　B．$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$　　C．$\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{2}=1$　　D．$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{6}=1$

6．已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}$， $\alpha\in(0,\pi)$，则 $\tan\alpha=$(A)

A．-1　　B．1　　C．$-\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{3}$

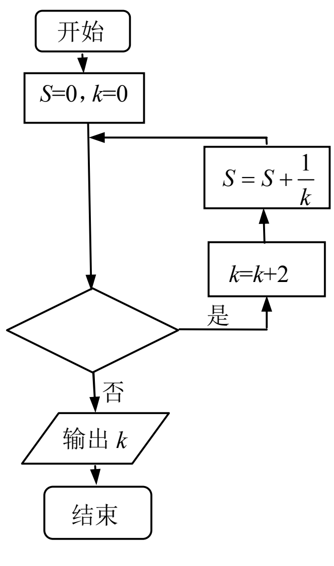
7．执行如图所示的程序框图，若输出 k 的值为 8，则判断框内可填入的条件是(B)

A．$S\le\dfrac{3}{4}$?

B．$S\le\dfrac{11}{12}$?

C．$S\le\dfrac{25}{24}$?

D．$S\le\dfrac{137}{120}$?



8．设 $a=\log_3 2$， $b=\ln 2$， $c=5^{-\frac{1}{2}}$，则(C)

A．$a<b<c$　　B．$b<c<a$　　C．$c<a<b$　　D．$c<b<a$

9．下面是关于公差$d>0$的等差数列$\{a_n\}$的四个命题：

p_1：数列$\{a_n\}$是递增数列；　p_2：数列$\{na_n\}$是递增数列；

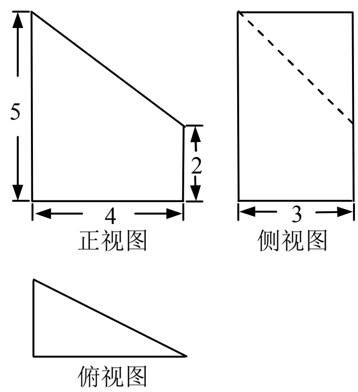
p_3：数列$\{\frac{a_n}{n}\}$是递增数列；　p_4：数列$\{a_n+3nd\}$是递增数列．

其中的真命题为(D)

A．p_1，p_2　　B．p_3，p_4

C．p_2，p_3　　D．p_1，p_4

10．某几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为(B)



A．54

B．60

C．66

D．72

11．动点$A(x，y)$在圆$x^2+y^2=1$上绕坐标原点沿逆时针方向匀速旋转，12 秒旋转一周．已知时间$t=0$时，点A的坐标是$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，则当$0\le t\le 12$时，动点$A$的纵坐标$y$关于$t$（单位：秒）的函数的单调递增区间是(D)

A．$[0,1]$　　B．$[1,7]$　　C．$[7,12]$　　D．$[0,1]$和$[7,12]$

12．已知椭圆Γ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，过右焦点$F$且斜率为$k$（$k>0$）的直线与$\Gamma$相交于$A$，$B$两点．若$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，则$k=$(B)

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分．

13．已知点$P(-1,2)$，线段PQ的中点M的坐标为$(1,-1)$．若向量$\overrightarrow{PQ}$与向量$\boldsymbol{a}=(\lambda，1)$共线，则$\lambda=$____．

答案：$-\frac{2}{3}$

14．已知数列$\{a_n\}$是等差数列，若a_1+1，a_3+3，a_5+5构成公比为q的等比数列，则$q=$____．

答案：1

15．已知直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的各顶点都在同一球面上．若$AB=AC=AA_1=2$，$\angle BAC=$ $=90^\circ$，则该球的体积等于____．

答案：$4\sqrt{3}\pi$

16．函数$f(x)=\sin x-\cos x+x+1$在$[\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}]$上的最大值为____．

答案：$\pi+2$

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分 12 分）

在ΔABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$b\sin A=\sqrt{3}a\cos B$．

（Ⅰ）求 B；

（Ⅱ）若 $b=3$，$\sin C=2\sin A$，求 a，c.

解：（Ⅰ）由 $b\sin A=\sqrt{3}a\cos B$ 及正弦定理，得 $\sin B\sin A=\sqrt{3}\sin A\cos B$.

在△ABC 中，$\sin A\neq 0$，

$\therefore \sin B=\sqrt{3}\cos B$，$\therefore \tan B=\sqrt{3}$.

$\because 0<B<\pi$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………6 分

（Ⅱ）由 $\sin C=2\sin A$ 及正弦定理，得 $c=2a$.　　　　①

由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得

$3^2=a^2+c^2-2ac\cos\frac{\pi}{3}$，即 $a^2+c^2-ac=9$.　　　　②

解①②，得 $a=\sqrt{3}$，$c=2\sqrt{3}$. ……………………………………………………12 分

18.（本小题满分 12 分）

某工厂 36 名工人的年龄数据如下表：

工人编号	年龄	工人编号	年龄	工人编号	年龄	工人编号	年龄
1	40	10	36	19	27	28	34
2	44	11	31	20	43	29	39
3	40	12	38	21	41	30	43
4	41	13	39	22	37	31	38
5	33	14	43	23	34	32	42
6	40	15	45	24	42	33	53
7	45	16	39	25	37	34	37
8	42	17	38	26	44	35	49
9	43	18	36	27	42	36	39

（Ⅰ）用系统抽样法从 36 名工人中抽取容量为 9 的样本，且在第一分段里用随机抽样法抽到的年龄数据为 44，列出样本的年龄数据；

（Ⅱ）计算（Ⅰ）中样本的平均值 $\bar{x}$ 和方差 s^2；

（Ⅲ）求这 36 名工人中年龄在 $(\bar{x}-s,\bar{x}+s)$ 内的人数所占的百分比.

解：（Ⅰ）根据系统抽样的方法，抽取容量为 9 的样本，应分为 9 组，每组 4 人.

由题意可知，抽取的样本编号依次为：2，6，10，14，18，22，26，30，34，

对应样本的年龄数据依次为：44，40，36，43，36，37，44，43，37. ……4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ），得 $\bar{x}=\frac{44+40+36+43+36+37+44+43+37}{9}=40$，

$s^2=\frac{1}{9}[(44-40)^2+(40-40)^2+(36-40)^2+(43-40)^2+(36-40)^2+(37-40)^2+(44-40)^2+(43-40)^2+(37-40)^2]=\frac{100}{9}$. ……………………………………8 分

（Ⅲ）由（Ⅱ），得 $\bar{x}=40$，$s=\frac{10}{3}$，$\therefore \bar{x}-s=36\frac{2}{3}$，$\bar{x}+s=43\frac{1}{3}$，

由表可知，这 36 名工人中年龄在 $(\bar{x}-s,\ \bar{x}+s)$ 内共有 23 人，所占的百分比为 $\frac{23}{36}\times 100\%\approx 63.89\%$. ……………………………………………………………12 分

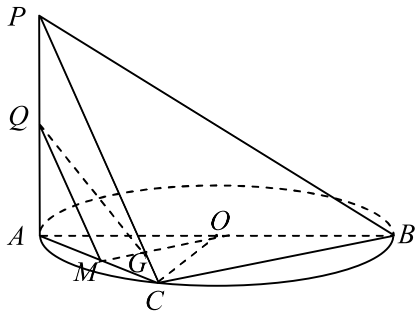
19.（本小题满分 12 分）

如图，PA 垂直圆 O 所在的平面，C 是圆 O 上的点，Q 为 PA 的中点，G 为 ΔAOC 的重

心，AB 是圆 O 的直径，且 $AB=2AC=2$．

（Ⅰ）求证：QG // 平面 PBC；

（Ⅱ）求 G 到平面 PAC 的距离．



解：（Ⅰ）如图，连结 OG 并延长交 AC 于 M，连结 QM，QO．

∵G 为△AOC 的重心，∴M 为 AC 的中点．

∵O 为 AB 的中点，∴OM // BC．

∵$OM\not\subset$平面 PBC，$BC\subset$平面 PBC，∴OM // 平面 PBC．

同理 QM // 平面 PBC．

又 $OM\subset$平面 QMO，$QM\subset$平面 QMO，$OM\cap QM=M$，

∴平面 QMO // 平面 PBC．

∵$QG\subset$平面 QMO，

∴QG // 平面 PBC．…………………………………………………………………6 分

（Ⅱ）∵AB 是圆 O 的直径，∴$BC\perp AC$．

由（Ⅰ），知 OM // BC，∴$OM\perp AC$．

∵$PA\perp$平面 ABC，$OM\subset$平面 ABC，∴$PA\perp OM$．

又 $PA\subset$平面 PAC，$AC\subset$平面 PAC，$PA\cap AC=A$，

∴$OM\perp$平面 PAC，∴GM 就是 G 到平面 PAC 的距离．

由已知可得，$OA=OC=AC=1$，

∴△AOC 为正三角形，∴$OM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

又 G 为△AOC 的重心，∴$GM=\dfrac{1}{3}OM=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$．

故 G 到平面 PAC 的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$．……………………………………………………12 分

20．（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(0,3)$，直线 l：$y=2x-4$．设圆 C 的半径为 1，圆心在 l 上．

（Ⅰ）若圆心 C 也在直线 $y=x-1$ 上，过点 A 作圆 C 的切线，求切线的方程；

（Ⅱ）若圆 C 上存在点 M，使 $|MA|=2|MO|$，求圆心 C 的横坐标 a 的取值范围．

解：（Ⅰ）由题设，圆心 C 是直线 $y=2x-4$ 与直线 $y=x-1$ 的交点，

由$\begin{cases}y=2x-4,\\y=x-1.\end{cases}$ 解得 $C(3，2)$，于是切线的斜率必存在．

设过 $A(0，3)$的圆 C 的切线方程为 $y=kx+3$，即 $kx-y+3=0$，

由题意，$\dfrac{|3k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=0$，或 $k=-\dfrac{3}{4}$．

故所求切线方程为 $y=3$，或 $y=-\dfrac{3}{4}x+3$，即 $y=3$，或 $3x+4y-12=0$．……4 分

（Ⅱ）∵圆 C 的圆心在直线 $y=2x-4$ 上，

∴圆 C 的方程为$(x-a)^2+[y-(2a-4)]^2=1$．

设点 $M(x，y)$，由$|MA|=2|MO|$，得$\sqrt{x^2+(y-3)^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$，

化简，得 $x^2+y^2+2y-3=0$，即 $x^2+(y+1)^2=4$，

∴点 M 在以 $D(0，-1)$为圆心，2 为半径的圆上．

由题意，点 $M(x，y)$在圆 C 上，

∴圆 C 和圆 D 有公共点，则 $2-1\leqslant|CD|\leqslant 2+1$，

∴$1\leqslant\sqrt{(a-0)^2+[(2a-4)-(-1)]^2}\leqslant 3$，即 $1\leqslant\sqrt{5a^2-12a+9}\leqslant 3$.

由 $5a^2-12a+8\geqslant 0$，得 $x\in\mathbf{R}$；

由 $5a^2-12a\leqslant 0$，得 $0\leqslant a\leqslant\dfrac{12}{5}$.

故圆心 C 的横坐标 a 的取值范围为$[0,\ \dfrac{12}{5}]$. ……………………………………12 分

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x+k}{\mathrm{e}^x}$（$k$ 为常数，$\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数），曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与 x 轴平行.

（Ⅰ）求 k 的值；

（Ⅱ）设 $g(x)=(x^2+x)f'(x)$，其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数. 证明：$\forall x>0$，$g(x)<1+\mathrm{e}^{-2}$.

解：（Ⅰ）由 $f(x)=\dfrac{\ln x+k}{\mathrm{e}^x}$，得 $f'(x)=\dfrac{1-kx-x\ln x}{x\mathrm{e}^x}$，$x\in(0,\ +\infty)$.

由已知，得 $f'(1)=\dfrac{1-k}{\mathrm{e}}=0$，∴$k=1$. ………………………………………………4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ），得 $g(x)=(x^2+x)\cdot\dfrac{1-x-x\ln x}{x\mathrm{e}^x}=\dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x}(1-x-x\ln x)$，$x\in(0,\ +\infty)$.

设 $h(x)=1-x-x\ln x$，则 $h'(x)=-\ln x-2$，$x\in(0,\ +\infty)$.

令 $h'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}^{-2}$.

当 $0<x<\mathrm{e}^{-2}$ 时，$h'(x)>0$，∴$h(x)$在$(0,\ \mathrm{e}^{-2})$上是增函数；

当 $x>\mathrm{e}^{-2}$ 时，$h'(x)<0$，∴$h(x)$在$(\mathrm{e}^{-2},\ +\infty)$上是减函数.

故 $h(x)$在$(0,\ +\infty)$上的最大值为 $h(\mathrm{e}^{-2})=1+\mathrm{e}^{-2}$，即 $h(x)\leqslant 1+\mathrm{e}^{-2}$.

设 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x-(x+1)$，则 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^x-1>0$，$x\in(0,\ +\infty)$，

∴$\varphi(x)$在$(0,\ +\infty)$上是增函数，

∴$\varphi(x)>\varphi(0)=0$，即 $\mathrm{e}^x-(x+1)>0$，∴$0<\dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x}<1$.

∴$g(x)=\dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x}h(x)<1+\mathrm{e}^{-2}$.

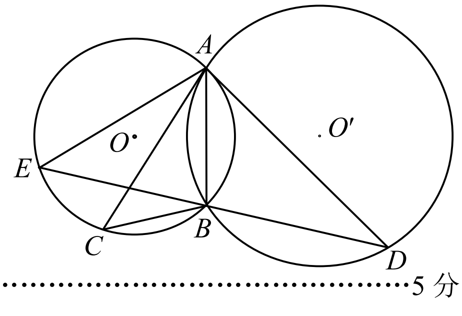
因此，对任意 $x>0$，$g(x)<1+\mathrm{e}^{-2}$. ………………………………………………12 分

22.（本小题满分 10 分）选修 4-1：几何证明选讲

如图，⊙O 和⊙O'相交于 A，B 两点，过 A 作两圆的切线分别交两圆于 C，D 两点，连结 DB 并延长交⊙O 于点 E，已知 $AC=BD=3$.

（Ⅰ）求 $AB\cdot AD$ 的值；

（Ⅱ）求线段 AE 的长.



解：（Ⅰ）∵AC 切⊙O'于 A，∴$\angle CAB=\angle ADB$，

同理$\angle ACB=\angle DAB$，∴$\triangle ACB\backsim\triangle DAB$，

∴$\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{AB}{BD}$，即 $AC\cdot BD=AB\cdot AD$.

∵$AC=BD=3$，∴$AB\cdot AD=9$. ……………………………………………………5 分

（Ⅱ）∵AD 切⊙O 于 A，∴$\angle AED=\angle BAD$，

又$\angle ADE=\angle BDA$，∴$\triangle EAD\backsim\triangle ABD$，

$\therefore \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AD}{BD}$，即 $AE \cdot BD=AB \cdot AD$．

由（Ⅰ）可知，$AC \cdot BD=AB \cdot AD$，

$\therefore AE=AC=3$．……………………………………………………………………10 分

23．（本小题满分 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y=-5+\dfrac{1}{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数）．以原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\sqrt{3}\cos\theta$．

（Ⅰ）把曲线 C 的极坐标方程化为直角坐标方程，并说明它表示什么曲线；

（Ⅱ）若 P 是直线 l 上的一点，Q 是曲线 C 上的一点，当 $|PQ|$ 取得最小值时，求 P 的直角坐标．

解：（Ⅰ）由 $\rho=2\sqrt{3}\cos\theta$，得 $\rho^2=2\sqrt{3}\rho\cos\theta$，从而有 $x^2+y^2=2\sqrt{3}x$，

$\therefore (x-\sqrt{3})^2+y^2=3$．

$\therefore$ 曲线 C 是圆心为 $(\sqrt{3}，0)$，半径为 $\sqrt{3}$ 的圆．……………………………………5 分

（Ⅱ）由题设条件知，$|PQ|+|QC|\geqslant|PC|$，当且仅当 P，Q，C 三点共线时，等号成立，

即 $|PQ|\geqslant|PC|-\sqrt{3}$，$\therefore |PQ|_{\min}=|PC|_{\min}-\sqrt{3}$．

设 $P(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t，-5+\dfrac{1}{2}t)$，又 $C(\sqrt{3}，0)$，

则 $|PC|=\sqrt{(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-\sqrt{3})^2+(-5+\dfrac{1}{2}t)^2}=\sqrt{t^2-2t+28}=\sqrt{(t-1)^2+27}$．

当 $t=1$ 时，$|PC|$ 取得最小值，从而 $|PQ|$ 也取得最小值，

此时，点 P 的直角坐标为 $(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}，-\dfrac{9}{2})$．…………………………………………10 分

24．（本小题满分 10 分）选修 4-5：不等式选讲

已知 $a>0$，$b>0$，函数 $f(x)=|x-a|+|x+b|$ 的最小值为 2．

（Ⅰ）求 $a+b$ 的值；

（Ⅱ）证明：$a^2+a>2$ 与 $b^2+b>2$ 不可能同时成立．

解：（Ⅰ）$\because a>0$，$b>0$，

$\therefore f(x)=|x-a|+|x+b|\geqslant|(x-a)-(x+b)|=|-a-b|=|a+b|=a+b$，

$\therefore f(x)_{\min}=a+b$．

由题设条件知 $f(x)_{\min}=2$，

$\therefore a+b=2$．……………………………………………………………………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）及基本不等式，得 $2\sqrt{ab}\leqslant a+b=2$，$\therefore ab\leqslant 1$．

假设 $a^2+a>2$ 与 $b^2+b>2$ 同时成立，

则由 $a^2+a>2$ 及 $a>0$，得 $a>1$．

同理 $b>1$，$\therefore ab>1$，这与 $ab\leqslant 1$ 矛盾．

故 $a^2+a>2$ 与 $b^2+b>2$ 不可能同时成立．………………………………10 分