数列中的公共项问题

1.数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式分别为$a_n=4n-1$，$b_n=3n+2$，它们的公共项由小到大排成的数列是$\{c_n\}$，求数列$\{c_n\}$的通项公式.

【解析】法一：设$a_k=b_m=c_p$，则$4k-1=3m+2$，所以$k=\dfrac{3(m+1)}{4}$，

因为 3，4 互质，所以$m+1$必为 4 的倍数，即$m=4p-1$，

所以$c_p=b_m=3(4p-1)+2=12p-1$，

即数列$\{c_n\}$的通项公式为$c_n=12n-1$.

2.已知数列$\{a_n\}$的前n项的和S_n满足$2S_n=4a_n-3$，数列$\{b_n\}$的前n项的积$T_n=2^{n^2+2n}\cdot 3^n$. 数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的公共项由小到大排成的数列是$\{c_n\}$，求数列$\{c_n\}$的前n项的和.

【解析】由$2S_n=4a_n-3$可得$a_1=\dfrac{3}{2}$，$2S_{n-1}=4a_{n-1}-3$，

所以$2a_n=2(S_n-S_{n-1})=4a_n-4a_{n-1}$，即$a_n=2a_{n-1}$ （$n\geq 2$），因此$a_n=3\cdot 2^{n-2}$.

由$T_n=2^{n^2+2n}\cdot 3^n$可得$b_1=2^{1+2}\cdot 3=24$，

又$b_n=\dfrac{T_n}{T_{n-1}}=\dfrac{2^{n^2+2n}\cdot 3^n}{2^{(n-1)^2+2(n-1)}\cdot 3^{n-1}}=3\cdot 2^{2n+1}$ （$n\geq 2$），因此$b_n=3\cdot 2^{2n+1}$.

设$a_k=b_m=c_p$，则$3\cdot 2^{k-2}=3\cdot 2^{2m+1}$，所以$k=2m+3$ （$m\geq 1$）即可，

所以，$c_n=3\cdot 2^{2n+3-2}=3\cdot 2^{2n+1}$.

所以，数列$\{c_n\}$的前n项的和为$\dfrac{24(1-4^n)}{1-4}=8(4^n-1)=2^{2n+3}-8$.

3.数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式分别为$a_n=2^n$，$b_n=3n+2$，它们的公共项由小到大排成的数列是$\{c_n\}$，求数列$\{c_n\}$的通项公式.

【解析】观察数列的前几项可得，$c_1=8$.

设$a_k=b_m=c_p$，则$2^k=3m+2$.

则$a_{k+1}=2^{k+1}=2\times 2^k=2(3m+2)=6m+4=3(2m+\dfrac{2}{3})+2$不是数列$\{b_n\}$中的项，

$a_{k+2}=2^{k+2}=4\times 2^k=4(3m+2)=12m+8=3(4m+2)+2$是数列$\{b_n\}$中的项，

所以，$c_{p+1}=a_{k+2}$，则$\dfrac{c_{p+1}}{c_p}=\dfrac{a_{k+2}}{a_k}=2^2=4$，

所以数列$\{c_n\}$是等比数列，公比为 4，首项为 8，即通项公式为$c_n=2^{2n+1}$.