24*.*1*.*2垂直于弦的直径







1*.*通过观察试验,理解圆的轴对称性*.*

2*.*掌握垂径定理及其推论*.*

3*.*会用垂径定理解决有关的证明与计算问题*.*



1*.*通过探索圆的对称性及相关性质,培养学生动手操作能力及观察、分析、逻辑推理和归纳概括能力*.*

2*.*经历探究垂径定理及其推论的过程,进一步体会和理解研究几何图形的各种方法*.*



1*.*通过探究垂径定理的活动,激发学生探究、发

现数学问题的兴趣,培养学生大胆猜想、乐于探究的良好品质*.*

2*.*培养学生观察能力,激发学生的好奇心和求知欲,并从数学学习活动中获得成功的体验*.*



【重点】垂径定理及其应用*.*

【难点】探索并证明垂径定理,利用垂径定理解决一些实际问题*.*



【教师准备】多媒体课件1*~*5*.*

【学生准备】圆形纸片、预习教材P81*~*83*.*





导入一:

【课件1】赵州桥(如图所示)是我国隋代建造的石拱桥,距今约有1400年的历史,是我国古代人民勤劳与智慧的结晶*.*它的主桥拱是圆弧形,它的跨度(弧所对的弦的长)为37 m,拱高(弧的中点到弦的距离)为7*.*23 m,求赵州桥主桥拱的半径(结果保留小数点后一位)*.*



[过渡语]要解决这个实际问题,我们的知识储备还不够,通过这节课的学习,我们将能解决这类和圆有关的实际问题*.*

导入二:

复习提问:

1*.*什么是轴对称图形?

2*.*圆是轴对称图形吗?如果是,它的对称轴是什么?你能找到多少条对称轴?

3*.*你是用什么方法解决上述问题的?

(教师引导折叠课前准备的圆形纸片*.*)

4*.*直径是圆的对称轴这种说法正确吗?

【师生活动】学生思考后小组合作交流,学生回答后教师点评,指出“直径是圆的对称轴”这种说法错误的原因*.*

【课件2】圆是轴对称图形,任何一条直径所在直线都是圆的对称轴*.*

[设计意图]通过实际问题导入新课,让学生感受数学来源于生活,又应用于生活*.*通过复习旧知识和创设动手操作活动,激发学生的学习兴趣,引出本节内容,为本节课的学习进行铺垫*.*



[过渡语]我们知道了圆是轴对称图形,并且直径所在直线就是它的对称轴,那么今天我们就利用圆的对称性来探究圆还有哪些性质*.*

一、共同探究1

思路一

在自己课前准备的纸片上作图*.*

1*.*任意作一条弦*AA'.*

2*.*过圆心*O*作弦*AA'*的垂线,得直径*CD*交*AA'*于点*M.*

3*.*观察图形,你能找到哪些相等线段?

4*.*你能证明你的结论吗?写出你的证明过程*.*

5*.*如果沿着*CD*折叠,你能不能得到相等的弧?

6*.*图形中的已知条件、结论分别是什么?你能用语言叙述这个命题吗?

【师生活动】让学生独立思考、尝试证明,然后小组合作交流,共同探究结论*.*教师在巡视过程中帮助有困难的学生*.*学生回答问题,并展示自己的证明过程,教师适时点评*.*

【课件3】证明:连接*OA*,*OA'*,在Δ*OAA'*中,

∵*OA*=*OA'*,

∴Δ*OAA'*是等腰三角形*.*

又*AA'*⊥*CD*,∴*AM*=*MA'.*

即*CD*是*AA'*的垂直平分线*.*这就是说,对于圆上任意一点*A*,在圆上都有关于直线*CD*的对称点*A'*,因此☉*O*关于直线*CD*对称*.*

把圆沿着直径*CD*折叠时,点*A*与点*A'*重合,*AM*与*A'M*重合,$\overparen{AD}$,$\overparen{AC}$分别与$\overparen{A'D}$,$\overparen{A'C}$重合*.*

因此,*AM*=*A'M*,$\overparen{AD}=\overparen{A'D}$,$\overparen{AC}=\overparen{A'C}$*.*

即直径*CD*平分弦*AA'*,并且平分$\overparen{AA'}$,$\overparen{ACA'}$*.*

垂径定理:垂直于弦的直径平分弦,并且平分弦所对的两条弧*.*



思路二

动手操作:

1*.*把课前准备的圆形纸片(☉*O*)对折,使圆的两半部分重合;

2*.*把得到的折痕记作*CD*;

3*.*在☉*O*上任取一点*A*,过点*A*作折痕*CD*的垂线,沿垂线折叠,得到新的折痕,两条折痕的交点为*M*,即垂足为*M.*

4*.*将纸片打开,新的折痕与圆交于另一点*A'.*(如上图所示)

【思考】

1*.*通过上面的操作,你发现了哪些相等的线段和相等的弧?为什么?

2*.*你能不能把刚才的操作当成条件,观察到的结果作为结论,归纳出一个正确的命题?

【师生活动】互相交流操作结果及思考后得到的结论,教师对学习有困难的学生给予帮助,学生展示后教师点评*.*

由折叠可得*A*与*A'*重合,$\overparen{AD}$,$\overparen{AC}$分别与$\overparen{A'D}$,$\overparen{A'C}$重合*.*

∴*AM*=*MA'*,$\overparen{AD}=\overparen{A'D}$,$\overparen{AC}=\overparen{A'C}$*.*

即直径*CD*平分弦*AA'*,并且平分$\overparen{AA}$,$\overparen{ACA'}$*.*

归纳结论:

垂径定理:垂直于弦的直径平分弦,并且平分弦所对的两条弧*.*



[设计意图]通过学生动手操作、观察、分析、交流,教师引导归纳出垂直于弦的直径的性质,经历知识的形成过程,培养学生观察能力和归纳概括能力,提高分析问题、解决问题的能力,同时感受圆的对称美*.*

二、共同探究2

【思考】

1*.*垂径定理的条件和结论分别是什么?

条件:①过圆心;②垂直于弦*.*

结论:③平分弦;④平分弦所对的劣弧;⑤平分弦所对的优弧*.*

2*.*条件改为:①过圆心;③平分弦*.*

结论改为:②垂直于弦;④平分弦所对的劣弧;⑤平分弦所对的优弧*.*

这个命题正确吗?说明理由*.*

【师生活动】学生口述理由,教师点评*.*

3*.*你能用语言叙述这个结论吗?

【学生活动】尝试用语言叙述结论,教师及时补充*.*

【课件4】推论:平分弦(不是直径)的直径垂直于弦,并且平分弦所对的两条弧*.*

4*.*为什么要求“弦不是直径”?否则会出现什么情况?

[设计意图]把定理的条件和结论用序号标识,加深对定理和推论的理解和记忆,有利于解决易混淆的题目,同时培养了学生解决问题的意识和能力*.*

三、共同探究3

[过渡语]经过这节课的学习,让我们看看能不能解决新课导入中的实际问题吧*.*

教材例2讲解

【共同分析】

1*.*如何根据赵州桥的实物图画出几何图形?

2*.*结合所画图形思考:

(1)桥的跨度是弧所对的,弧的中点到弦的距离是,它与所在圆的半径之间的关系是*.*

(2)如何找到弧的中点?

(根据垂径定理,过圆心作弦的垂线与弧相交*.*)

(3)如何把圆的半径转化为三角形中的线段?

(连接半径,构造直角三角形*.*)

(4)构造的直角三角形中三边之间有什么特点?

(一边是弦长的一半,另两边的长的差等于拱高*.*)

(5)直角三角形中已知一边、另外两边之间的关系,如何求另两边长?

(设未知数,用勾股定理列方程求解*.*)

【师生活动】教师引导,师生共同完成思考题后,学生书写解题过程,教师点评*.*

【课件5】解:如图所示,用$\overparen{AB}$表示主桥拱,设$\overparen{AB}$所在圆的圆心为*O*,半径为*R.*



经过圆心*O*作弦*AB*的垂线*OC*,*D*为垂足,*OC*与$\overparen{AB}$相交于点*C*,连接*OA.*根据垂径定理,*D*是*AB*的中点,*C*是$\overparen{AB}$的中点,*CD*就是拱高*.*

由题设可知*AB*=37 m,*CD*=7*.*23 m,

所以*AD*=$\frac{1}{2}$*AB*=$\frac{1}{2}$×37=18*.*5(m),

*OD*=*OC-CD*=*R-*7*.*23*.*

在RtΔ*OAD*中,由勾股定理,

得*OA*2=*AD*2+*OD*2,

即*R*2=18*.*52+(*R-*7*.*23)2*.*

解得*R*≈27*.*3(m)*.*

因此,赵州桥的主桥拱半径约为27*.*3 m*.*

【思考】

1*.*在圆中解决有关弦的问题,常作什么辅助线?

2*.*在圆中解决有关弦的问题,常用什么方法?

【师生活动】学生思考回答后,教师归纳总结*.*

在圆中解决有关弦的问题时,常常过圆心作弦的垂线段作为辅助线,这样可以把垂径定理和勾股定理结合,得到圆的半径*r*、弦心距*d*、弦长*a*的一半之间的关系式:*r*2=*d*2+$\left(\frac{a}{2}\right)^{2}$*.*

[设计意图]教师引导学生共同分析、解决问题,降低了例题的难度,体会建模思想在数学中的应用,同时掌握一类题型的解题方法,作辅助线的方法,提高了学生分析问题、解决问题的能力和归纳总结能力*.*

[知识拓展]1*.*由垂径定理可以得到以下结论:

(1)若直径垂直于弦,则直径平分弦及其所对的两条弧*.*

(2)平分弦(不是直径)的直径垂直于弦,并且平分弦所对的两条弧*.*

(3)垂直且平分一条弦的直线过圆心*.*

综上所述,可以知道在①过圆心;②垂直于弦;③平分弦;④平分弦所对的劣弧;⑤平分弦所对的优弧这五个条件中满足其中任意两个,就可以推出另外三项,简称5*.*2*.*3定理*.*

2*.*利用垂径定理及其推论可以证明平分弧、平分弦,证明垂直,证明一条线段是直径*.*

3*.*利用垂径定理的推论可以确定圆心的位置:在圆中找两条不平行的弦,分别作两条弦的垂直平分线,两条垂直平分线的交点即为圆心*.*

4*.*由于垂直于弦的直径平分弦,因此可以在圆中构造直角三角形,利用勾股定理列方程求弦长(或半径)*.*

5*.*圆心到弦的距离叫做弦心距*.*



1*.*圆是轴对称图形,任何一条直径所在直线都是圆的对称轴*.*

2*.*垂径定理、推论及其应用*.*

3*.*垂径定理和勾股定理相结合,可将圆的问题转化为直角三角形问题*.*

4*.*圆中常作的辅助线:连半径、过圆心作弦的垂线*.*



1*.*如图所示,*AB*是☉*O*的直径,*CD*是弦,*CD*⊥*AB*于点*E*,则下列结论不一定成立的是 ()



A.∠*COE*=∠*DOE*

B.*CE*=*DE*

C.*OE*=*BE*

D.$\overparen{BC}=\overparen{BD}$

解析:由垂径定理可知B,D均成立;由Δ*OCE*≌Δ*ODE*可得A也成立;不一定成立的是*OE*=*BE.*故选C.

2*.*如图所示,已知☉*O*的半径为13,弦*AB*的长为24,则点*O*到*AB*的距离是 ()



A.6 B.5

C.4 D.3

解析:过*O*作*OC*⊥*AB*于*C*,∵*OC*过*O*,∴*AC*=*BC*=$\frac{1}{2}$*AB*=12,在RtΔ*AOC*中,由勾股定理得*OC*=$\sqrt{13^{2}-12^{2}}$=5*.*故选B.

3*.*如图所示,*P*为☉*O*内一点,*OP*=3 cm,☉*O*的半径为5 cm,则经过*P*点的最短弦长为,最长弦长为*.*



解析:当弦与*OP*垂直时,弦最短,连接*OA*,由勾股定理可得*AP*=$\sqrt{5^{2}-3^{2}}$=4(cm),∵*OP*⊥*AB*,∴*AB*=2*AP*=8 cm,即最短弦长为8 cm*.*过*P*点经过圆心的弦最长,最长弦长为10 cm*.*

答案:8 cm10 cm

4*.*如图所示,*AB*是☉*O*的弦,半径*OC*⊥*AB*于点*D.*



(1)若*AB*=8 cm,*OC*=5 cm,求*CD*的长;

(2)若*OC*=5 cm,*OD*=3 cm,求*AB*的长;

(3)若*AB*=8 cm,*CD*=2 cm,求☉*O*的半径*.*

解:连接*OA*,则*AO*=*OC.*

(1)∵*OC*⊥*AB*,∴*AD*=$\frac{1}{2}$*AB*=4 cm,

在RtΔ*OAD*中,

*OD*=$\sqrt{AO^{2}-AD^{2}}=\sqrt{5^{2}-4^{2}}$=3(cm),

∴*CD*=*OC-OD*=2 cm*.*

(2)在RtΔ*OAD*中,

*AD*=$\sqrt{AO^{2}-OD^{2}}=\sqrt{5^{2}-3^{2}}$=4(cm),

∵*OC*⊥*AB*,∴*AB*=2*AD*=8 cm*.*

(3)设☉*O*的半径为*r*,则*OD*=*r-*2,

∵*OC*⊥*AB*,∴*AD*=$\frac{1}{2}$*AB*=4 cm,

在RtΔ*OAD*中,*OA*2=*DO*2+*AD*2,

∴*r*2=(*r-*2)2+42,解得*r*=5,

∴☉*O*的半径为5 cm*.*



24*.*1*.*2垂直于弦的直径

一、共同探究1

垂径定理:

二、共同探究2

垂径定理的推论:

三、共同探究3

例2



一、教材作业

【必做题】

教材第89页习题24*.*1的2,8,9,10,11题*.*

【选做题】

教材第91页习题24*.*1的15题*.*





本节课以赵州桥这一生活实例引入新课,让学生体会数学在生活中的应用,然后让学生拿出自己手中的圆形纸片对折圆,观察对称性,学生很容易得到圆的对称轴,为后边的学习做好铺垫*.*探究活动让学生在自己的纸片上画出与直径垂直的弦,并把圆形纸片沿直径对折,问学生会发现什么结论,通过这一探究过程,大部分学生参与到课堂中去,并培养了学生动手操作和创新能力,也激发了学生探究问题的兴趣,学生就在这种轻松、愉快的活动中掌握了垂径定理,实现了教学的有效性,这是这节课中最成功的地方*.*



本节课知识把课本中赵州桥的问题作为第一个

题目让学生解决稍微偏难,应该先解决一些简单的类型题,这样可以使学生体会到成功的喜悦,之后再处理赵州桥的问题就变成水到渠成的事情了*.*



本节课的重点是垂径定理及其应用,可以设计成两个课时,探索垂径定理时给学生充足的时间思考讨论,垂径定理中平分弦的证明过程尽量给学生留点时间让学生板书出来,这样可以防止学生缺少主动性,并且会有更多的学生参与到课堂中去*.*第二个课时设计垂径定理的应用,包括实际应用(赵州桥问题)和在几何知识中的综合应用等,体现一题多变*.*在教学设计中要真正树立以学生的发展为本的教学理念*.*