

导数综合讲义

第 1 讲	导数的计算与几何意义3
第 2 讲	函数图像4
第 3 讲	三次函数7
第 4 讲	导数与单调性8
第 5 讲	导数与极最值9
第 6 讲	导数与零点10
第 7 讲	导数中的恒成立与存在性问题11
第 8 讲	原函数导函数混合还原（构造函数解不等式）13
第 9 讲	导数中的距离问题17
第 10 讲	导数解答题18
10.1	导数基础练习题21
10.2	分离参数类24
10.3	构造新函数类26
10.4	导数中的函数不等式放缩29
10.5	导数中的卡根思想30
10.6	洛必达法则应用32
10.7	先构造，再赋值，证明和式或积式不等式33
10.8	极值点偏移问题35
10.9	多元变量消元思想37
10.10	导数解决含有 $\ln x$ 与 e^x 的证明题（凹凸反转）39
10.11	导数解决含三角函数式的证明40
10.12	隐零点问题42
10.13	端点效应44
10.14	其它省市高考导数真题研究45

导数

【高考命题规律】

2014年理科高考考查了导数的几何意义，利用导数判断函数的单调性，利用导数求函数的最值，文科考查了求曲线的切线方程，导数在研究函数性质中的运用；2015年文理试卷分别涉及到切线、零点、单调性、最值、不等式证明、恒成立问题；2016文科考查了导数的几何意义，理科涉及到不等式的证明，含参数的函数性质的研究，极值点偏移；2017年高考考查了导数判断函数的单调性，含参零点的分类讨论。近四年的高考试题基本形成了一个模式，第一问求解函数的解析式，以切线方程、极值点或者最值、单调区间等为背景得到方程从而确定解析式，或者给出解析式探索函数的最值、极值、单调区间等问题，较为简单；第二问均为不等式相联系，考查不等式恒成立、证明不等式等综合问题，难度较大。预测2018年高考导数大题以对数函数、指数函数、反比例函数以及一次函数、二次函数中的两个或三个为背景，组合成一个函数，考查利用导数研究函数的单调性与极值及切线，不等式结合考查恒成立问题，另外2016年全国卷1理考查了极值点偏移问题，这一变化趋势应引起考生注意。

【基础知识整合】

1、导数的定义： $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ ， $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

2、导数的几何意义：导数值 $f'(x_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 上点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率

3、常见函数的导数： $C' = 0$ ； $(x^n)' = nx^{n-1}$ ； $(\sin x)' = \cos x$ ； $(\cos x)' = -\sin x$ ；

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}；(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}；(e^x)' = e^x；(a^x)' = a^x \ln a$$

4、导数的四则运算： $(u \pm v)' = u' \pm v'$ ； $(u \cdot v)' = u'v + v'u$ ； $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

5、复合函数的单调性： $f'_x(g(x)) = f'(u)g'(x)$

6、导函数与单调性：求增区间，解 $f'(x) > 0$ ；求减区间，解 $f'(x) < 0$

若函数在 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上是增函数 $\Rightarrow f'(x) \geq 0$ 在 (a, b) 上恒成立；

若函数在 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上是减函数 $\Rightarrow f'(x) \leq 0$ 在 (a, b) 上恒成立；

若函数在 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上存在增区间 $\Rightarrow f'(x) > 0$ 在 (a, b) 上恒成立；

若函数在 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上存在减区间 $\Rightarrow f'(x) < 0$ 在 (a, b) 上恒成立；

7、导函数与极值、最值：确定定义域，求导，解单调区间，列表，下结论

8、导数压轴题：强化变形技巧、巧妙构造函数、一定要多练记题型，总结方法

第1讲 导数的计算与几何意义

(2016 全国卷 1 理 16)若直线 $y = kx + b$ 是曲线 $y = \ln x + 2$ 的切线,也是曲线 $y = \ln(x+1)$ 的切线, 则 $b =$ _____

(2015 全国卷 1 理 21 (1)) 已知函数 $f(x) = x^3 + ax + \frac{1}{4}$, 当 a 为何值时, x 轴为曲线 $y = f(x)$ 的切线

(2015 安徽卷理 18 (1)) 设 $n \in N^*$, x_n 是曲线 $y = x^{2n+2} + 1$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标, 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式.

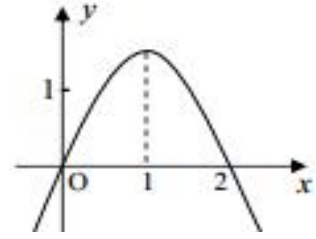
(2015 重庆卷理 20 (1)) 设函数 $f(x) = \frac{3ax^2 + ax}{e^x} (a \in R)$, 若 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极值, 确定 a 的值, 并求此时曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程

- 1、函数 $f(x) = \cos^2 x$ 在点 $(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$ 处的切线方程为 _____
- 2、过 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ 图像上一个动点作函数的切线, 则切线倾斜角的范围是 _____
- 3、若一直线与曲线 $y = \ln x$ 和曲线 $x^2 = ay (a > 0)$ 相切于同一点 P , 则 $a =$ _____
- 4、两曲线 $y = x^2 - 1$ 和 $y = a \ln x - 1$ 存在公切线, 则正实数 a 的取值范围是 _____
- 5、已知 a, b 为正实数, 直线 $y = x - a$ 与曲线 $y = \ln(x + b)$ 相切, 则 $\frac{a^2}{2 + b}$ 的取值范围是 ()
(A) $(0, +\infty)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(0, \frac{1}{2})$ (D) $[1, +\infty)$
- 6、若曲线 $y = \frac{1}{2e}x^2$ 与曲线 $y = a \ln x$ 在它们的公共点 $P(s, t)$ 处具有公切线, 则实数 $a =$ ()
(A) -2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2
- 7、函数 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 的可导函数, 当 $x > 0$ 且 $x \neq 1$ 时, $\frac{2f(x) + xf'(x)}{x-1} > 0$, 若曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线的斜率为 $-\frac{3}{4}$, 则 $f(1) =$ ()
(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{1}{5}$

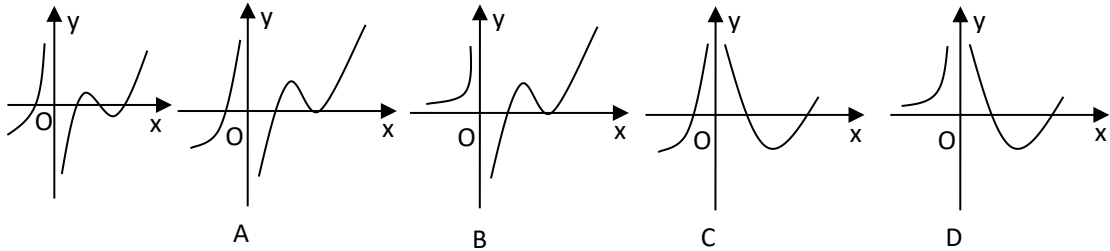
第2讲 图像问题

1、已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ ，其导数 $f'(x)$ 的图象如图所示，则函数 $f(x)$ 的极大值是 ()

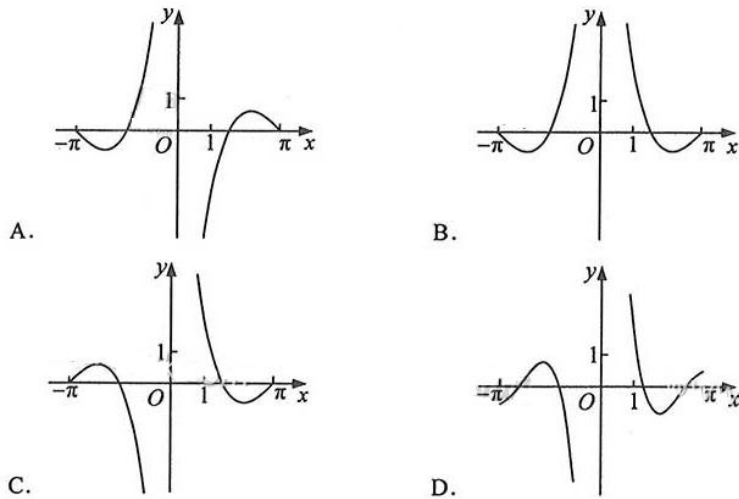
- (A) $a + b + c$ (B) $8a + 4b + c$
 (C) $3a + 2b$ (D) c



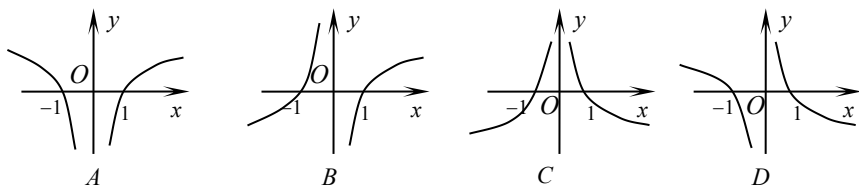
2、设函数 $y = f(x)$ 可导， $y = f(x)$ 的图象如图所示，则导函数 $y = f'(x)$ 的图像可能为 ()



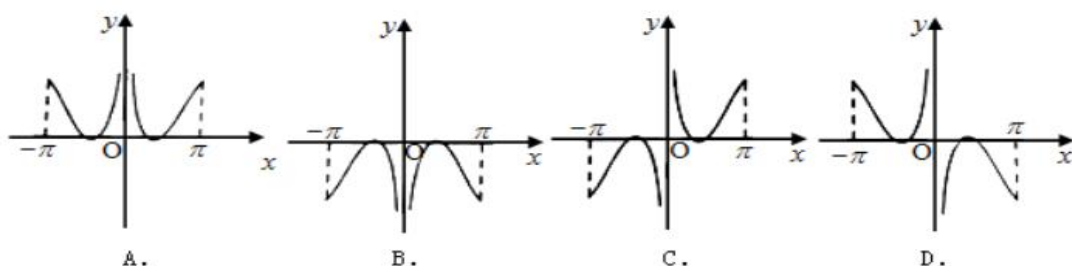
3、(2017 全国卷I文 8) 函数 $y = \frac{\sin 2x}{1 - \cos x}$ 的部分图像大致为



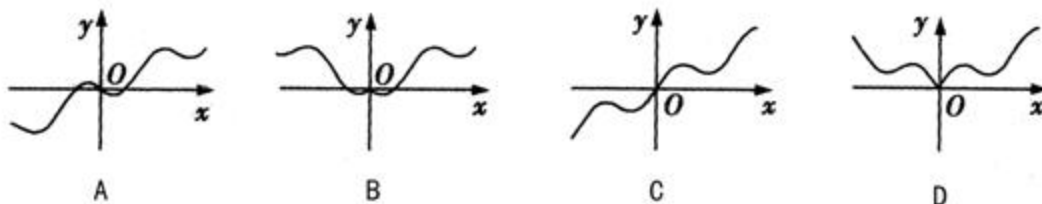
4、函数 $f(x) = \frac{x \ln|x|}{|x|}$ 的图像可能是 ()



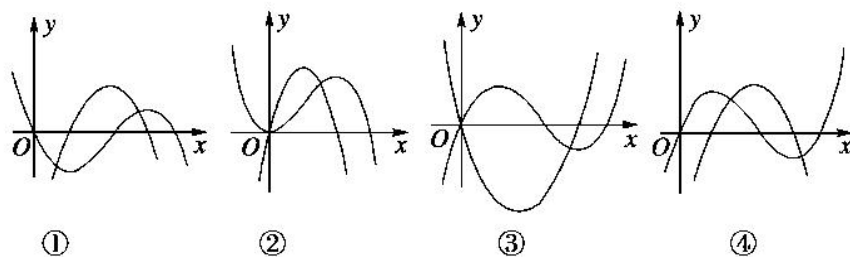
5、函数 $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right) \cos x$ ($-\pi \leq x \leq \pi, x \neq 0$) 的图像可能为 ()



6、已知 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则 $f'(x)$ 的图像是 ()



7、下面四图都是在同一坐标系中某三次函数及其导函数的图像, 其中一定不正确的序号是 ()



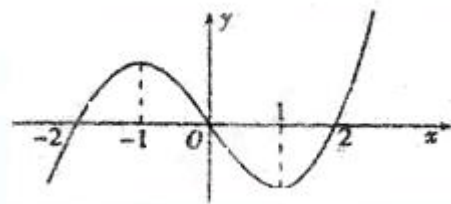
(A) ①②

(B) ③④

(C) ①③

(D) ①④

8、已知 R 上可导函数 $f(x)$ 的图象如图所示，

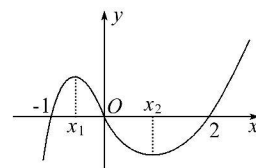


则不等式 $(x^2 - 2x - 3)f'(x) > 0$ 的解集为()

- (A) $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ (B) $(-\infty, -2) \cup (1, 2)$
 (C) $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (2, +\infty)$ (D) $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (3, +\infty)$

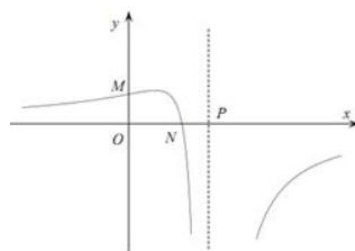
9、函数 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ 的大致图象如图所示,则 $x_1^2 + x_2^2$ 等于()

- (A) $\frac{8}{9}$ (B) $\frac{10}{9}$ (C) $\frac{16}{9}$ (D) $\frac{4}{5}$

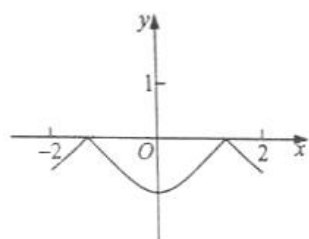


10、(2015 安徽) 函数 $f(x) = \frac{ax+b}{(x+c)^2}$ 的图像如图所示, 则下列结论成立的是 ()

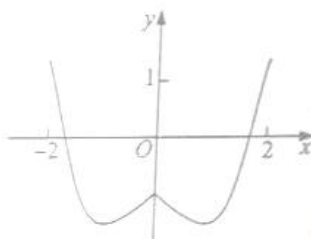
- (A) $a > 0, b > 0, c < 0$ (B) $a < 0, b > 0, c > 0$
 (C) $a < 0, b > 0, c < 0$ (D) $a < 0, b < 0, c < 0$



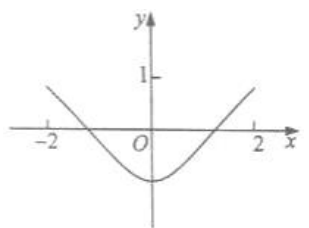
11、(2016 全国卷) 函数 $y = 2x^2 - e^{|x|}$ 在 $[-2, 2]$ 的图像大致为



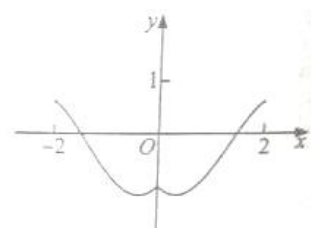
(A)



(B)



(B)



(D)

第3讲 三次函数

- 1、函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m+1)x^2 + 2(m-1)x$ 在 $(0, 4)$ 上无极值, 则 $m =$ _____
- 2、已知 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + bx + a^2$ 在 $x = -1$ 时有极值 0, 则 $a - b =$ _____
- 3、设函数 $f(x) = x^3 + (a+1)x^2 + ax$ 有两个不同的极值点 x_1, x_2 , 且对不等式 $f(x_1) + f(x_2) \leq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 _____
- 4、函数 $f(x) = -x^3 + 3x^2 - ax - 2a$, 若存在唯一正整数 x_0 , 使得 $f(x_0) > 0$, 则实数 a 的取值范围是 _____
- 5、已知函数 $f(x) = -x^3 + ax^2 - x - 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调函数, 则实数 a 的取值范围是 ()
 (A) $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ (B) $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ (C) $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ (D) $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$
- 6、若函数 $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{a}{2}x^2 + x + 1$ 在区间 $(\frac{1}{2}, 3)$ 上有极值点, 则实数 a 的取值范围是 ()
 (A) $(2, \frac{5}{2})$ (B) $[2, \frac{5}{2})$ (C) $(2, \frac{10}{3})$ (D) $[2, \frac{10}{3})$
- 7、若函数 $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{a}{2}x^2 + x + 1$ 在区间 $(\frac{1}{2}, 3)$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围是 ()
 (A) $[\frac{1}{3}, +\infty)$ (B) $[\frac{5}{3}, +\infty)$ (C) $[\frac{10}{3}, +\infty)$ (D) $[\frac{16}{3}, +\infty)$
- 8、若函数 $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{2}{3}$ 在区间 $(a, a+5)$ 上存在最小值, 则实数 a 的取值范围是 ()
 (A) $[-5, 0)$ (B) $(-5, 0)$ (C) $[-3, 0)$ (D) $(-3, 0)$
- 9、若函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - a^2 - 7a$ 在 $x = 1$ 处取得极大值 10, 则 $\frac{b}{a}$ 的值为 ()
 (A) $-\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{3}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$

第4讲 导数与单调性

- 1、已知函数 $f(x) = x^2 - 5x + 2\ln x$ ，则函数 $f(x)$ 的单调递增区间是_____
- 2、已知函数 $f(x) = e^x \ln x - ae^x (a \in R)$ ，若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调，则 a 的取值范围是_____
- 3、设函数 $f(x) = \frac{3x^2 + ax}{e^x} (a \in R)$ ，若 $f(x)$ 在 $[3, +\infty)$ 上为减函数，则 a 的取值范围是_____
- 4、若函数 $f(x)$ 在定义域 D 内的某个区间 I 上是增函数，且 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 I 上也是增函数，则称 $y = f(x)$ 是 I 上的“完美函数”，已知 $g(x) = e^x + x - \ln x + 1$ ，若函数 $g(x)$ 是区间 $[\frac{m}{2}, +\infty)$ 上的“完美函数”，则整数 m 的最小值为_____
- 5、设函数 $f(x) = e^{2x} + ax$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围为 ()
- (A) $[1, +\infty)$ (B) $(-1, +\infty)$ (C) $[-2, +\infty)$ (D) $(-2, +\infty)$
- 6、函数 $f(x) = 2x^2 - \ln x$ 在其定义域内的一个子区间 $(k-1, k+1)$ 内不单调，则 k 的取值范围是 ()
- (A) $[1, +\infty)$ (B) $[1, \frac{3}{2})$ (C) $[1, 2)$ (D) $[\frac{3}{2}, 2)$
- 7、若函数 $f(x) = \ln x + ax^2 - 2$ 在区间 $(\frac{1}{2}, 2)$ 内存在单调递增区间，则实数 a 的取值范围是 ()
- (A) $(-\infty, -2]$ (B) $(-2, +\infty)$ (C) $(-2, -\frac{1}{8})$ (D) $(-\frac{1}{8}, +\infty)$
- 8、设 $1 < x < 2$ ，则 $\frac{\ln x}{x}, (\frac{\ln x}{x})^2, \frac{\ln x^2}{x^2}$ 的大小关系是 ()
- (A) $(\frac{\ln x}{x})^2 < \frac{\ln x}{x} < \frac{\ln x^2}{x^2}$ (B) $\frac{\ln x}{x} < (\frac{\ln x}{x})^2 < \frac{\ln x^2}{x^2}$
- (C) $(\frac{\ln x}{x})^2 < \frac{\ln x^2}{x^2} < \frac{\ln x}{x}$ (D) $\frac{\ln x^2}{x^2} < (\frac{\ln x}{x})^2 < \frac{\ln x}{x}$
- 9、下列命题为真命题的个数是 ()
- ① $e^{\frac{2}{e}} > 2$ ② $\ln 2 > \frac{2}{3}$ ③ $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{1}{e}$ ④ $\frac{\ln 2}{2} < \frac{\ln \pi}{\pi}$
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

第5讲 导数与极最值

1、已知 $x=0$ 是函数 $f(x)=(x-2a)(x^2+a^2x+2a^2)$ 的极小值点, 则 a 的范围是_____

2、已知 $x=1$ 是函数 $f(x)=(x-2)e^x - \frac{k}{2}x^2 + kx(k>0)$ 的极小值点, 则 k 的范围是_____

3、已知函数 $f(x)=x^2-2x+1+a\ln x$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 则 ()

- (A) $f(x_2) < -\frac{1+2\ln 2}{4}$ (B) $f(x_2) < \frac{1-2\ln 2}{4}$
 (C) $f(x_2) > \frac{1+2\ln 2}{4}$ (D) $f(x_2) > \frac{1-2\ln 2}{4}$

4、若函数 $f(x)=ae^x+3x$ 在 R 上有小于零的极值点, 则实数 a 的取值范围是 ()

- (A) $(-3, +\infty)$ (B) $(-\infty, -3)$ (C) $(-\frac{1}{3}, +\infty)$ (D) $(-\infty, -\frac{1}{3})$

5、已知函数 $f(x)=x(\ln-ax)$ 有两个极值点, 则实数 a 的取值范围是 ()

- (A) $(-\infty, 0)$ (B) $(0, \frac{1}{2})$ (C) $(0, 1)$ (D) $(0, +\infty)$

6、若函数 $f(x)=\frac{ax^2}{2}-(1+2a)x+2\ln x(a>0)$ 在区间 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内有极值, 则 a 的取值范围是 ()

- (A) $(\frac{1}{e}, +\infty)$ (B) $(1, +\infty)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(2, +\infty)$

7、若函数 $f(x)$ 在区间 A 上, 对 $\forall a, b, c \in A, f(a), f(b), f(c)$ 为一个三角形的三条边, 则称函数 $f(x)$ 为“三角形函数”. 已知函数 $f(x)=x\ln x+m$ 在区间 $[\frac{1}{e^2}, e]$ 上是“三角形函数”, 则实数 m 的取值范围为 ()

- (A) $(\frac{1}{e}, \frac{e^2+2}{e})$ (B) $(\frac{2}{e}, +\infty)$ (C) $(\frac{1}{e}, +\infty)$ (D) $(\frac{e^2+2}{e}, +\infty)$

第 6 讲 导数与零点

1、设函数 $f(x) = x^2 - 2ex - \frac{\ln x}{x} + a$ ，若函数 $f(x)$ 至少存在一个零点，则实数 a 的取值范围是 ()

- (A) $(0, e^2 - \frac{1}{e}]$ (B) $(0, e^2 + \frac{1}{e}]$ (C) $[e^2 - \frac{1}{e}, +\infty)$ (D) $(-\infty, e^2 + \frac{1}{e}]$

2、已知函数 $f(x) = \frac{me^x}{2}$ 与函数 $g(x) = -2x^2 - x + 1$ 的图像有两个不相同的交点，则实数 m 的取值范围为 ()

- (A) $[0, 1)$ (B) $[0, 2) \cup \{-\frac{18}{e^2}\}$ (C) $(0, 2) \cup \{-\frac{18}{e^2}\}$ (D) $(0, 2\sqrt{e}) \cup \{-\frac{18}{e^2}\}$

3、定义：如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上存在 $x_1, x_2 (a < x_1 < x_2 < b)$ 满足 $f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ， $f'(x_2) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ，则称 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的“双中值函数”。已知

函数 $f(x) = 2x^3 - x^2 + m$ 是 $[0, 2a]$ 上的“双中值函数”，则实数 a 的取值范围是 ()

- (A) $(\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$ (B) $(\frac{1}{12}, \frac{1}{4})$ (C) $(\frac{1}{12}, \frac{1}{8})$ (D) $(\frac{1}{8}, 1)$

4、若存在正实数 m ，使得关于 x 的方程 $x + a(2x + 4m - 4ex)[\ln(x + m) - \ln x] = 0$ 有两个不同的根，则实数 a 的取值范围是 ()

- (A) $(-\infty, 0)$ (B) $(0, \frac{1}{2e})$ (C) $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2e}, +\infty)$ (D) $(\frac{1}{2e}, +\infty)$

5、(2017.12 成都一诊) 若关于 x 的方程 $\frac{x}{e^x} + \frac{e^x}{x - e^x} + m = 0$ 有三个不相等的实数解

x_1, x_2, x_3 ，且 $x_1 < 0 < x_2 < x_3$ ，其中 $m \in R, e = 2.71828\dots$ 为自然对数的底数，则

$(\frac{x_1}{e^{x_1}} - 1)^2 (\frac{x_2}{e^{x_2}} - 1) (\frac{x_3}{e^{x_3}} - 1)$ 的值为

- (A) e (B) $1 - m$ (C) $1 + m$ (D) 1

6、已知函数 $f(x) = (3x + 1)e^{x+1} + mx$ ，若有且仅有两个整数使得 $f(x) \leq 0$ ，则实数 m 的取值范围为

- (A) $(\frac{5}{e}, 2)$ (B) $[-\frac{5}{2e}, -\frac{8}{3e^2})$ (C) $[-\frac{1}{2}, -\frac{8}{3e^2})$ (D) $[-4e, -\frac{5}{2e})$

第7讲 导数中的恒成立与存在性问题

1、(2015 全国卷 1 理 12) 设函数 $f(x) = e^x(2x-1) - ax + a$ ，其中 $a < 1$ ，若存在唯一的整数 x_0 使得 $f(x_0) < 0$ ，则 a 的取值范围是 ()

- (A) $[-\frac{3}{2e}, 1)$ (B) $[-\frac{3}{2e}, \frac{3}{4})$ (C) $[\frac{3}{2e}, \frac{3}{4})$ (D) $[\frac{3}{2e}, 1)$

2、设函数 $f(x) = e^x(3x-1) - ax + a$ ，其中 $a < 1$ ，若有且只有一个整数 x_0 使得 $f(x_0) \leq 0$ ，则 a 的取值范围是 ()

- (A) $(\frac{2}{e}, \frac{3}{4})$ (B) $[\frac{2}{e}, \frac{3}{4})$ (C) $(\frac{2}{e}, 1)$ (D) $[\frac{2}{e}, 1)$

3、已知函数 $f(x) = x(a - \frac{1}{e^x})$ ，曲线 $y = f(x)$ 上存在两个不同点，使得曲线在这两点处的切线都与 y 轴垂直，则实数 a 的取值范围是 ()

- (A) $(-e^2, +\infty)$ (B) $(-e^2, 0)$ (C) $(-\frac{1}{e^2}, +\infty)$ (D) $(-\frac{1}{e^2}, 0)$

4、设函数 $f(x) = \frac{(e^2 - a)^2}{4} + (x - a)^2 (a \in R)$ ，若关于 x 的不等式 $f(x) \leq \frac{1}{5}$ 有解，则实数 a 的值为 ()

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

5、已知 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{2}x^2 (a > 0)$ ，若对任意两个不等的正实数 x_1, x_2 ，都有

$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 2$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是 ()

- (A) (0, 1] (B) (1, +∞) (C) (0, 1) (D) [1, +∞)

6、已知函数 $f(x) = a \ln(x+1) - x^2$ ，若对 $\forall p, q \in (0, 1)$ ，且 $p \neq q$ ，有

$\frac{f(p+1) - f(q+1)}{p - q} > 2$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为 ()

- (A) $(-\infty, 18)$ (B) $(-\infty, 18]$ (C) $[18, +\infty)$ (D) $(18, +\infty)$

7、设函数 $f(x) = e^x(x^2 - 3x + 3) - ae^x - x (x \geq -2)$ ，若不等式 $f(x) \leq 0$ 有解，则实数 a 的最小值为 ()

- (A) $1 - \frac{1}{e}$ (B) $2 - \frac{1}{e}$ (C) $\frac{1}{e} - 1$ (D) $1 + e^2$

8、设函数 $f(x) = e^x(x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2) - 2ae^x - x$ ，若不等式 $f(x) \leq 0$ 在 $[-2, +\infty)$ 上有解，则实数 a 的最小值为 ()

- (A) $-\frac{3}{2} - \frac{1}{e}$ (B) $-\frac{3}{2} - \frac{2}{e}$ (C) $-\frac{3}{4} - \frac{1}{2e}$ (D) $-1 - \frac{1}{e}$

9、已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + (x-b)^2}{x}$ ($b \in R$)，若存在 $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ ，使得 $f(x) > -xf'(x)$ ，则实数 b 的取值范围是 ()

- (A) $(-\infty, \sqrt{2})$ (B) $(-\infty, \frac{3}{2})$ (C) $(-\infty, \frac{9}{4})$ (D) $(-\infty, 3)$

10、已知 $f(x) = xe^x$ ， $g(x) = -(x+1)^2 + a$ ，若 $\exists x_1, x_2 \in R$ ，使得 $f(x_2) \leq g(x_1)$ 成立，则实数 a 的取值范围是_____

11、若关于 x 的不等式 $c^2x^2 - (cx+1)\ln x + cx \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，则实数 c 的取值范围是_____

12、若关于 x 的不等式 $(ax-1)(\ln x + ax) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围是_____

13、若函数 $f(x) = x - 1 - a \ln x$ ($a < 0$)， $g(x) = \frac{x}{e^{x-1}}$ ，且对任意 $x_1, x_2 \in [3, 4]$ ($x_1 \neq x_2$)，

$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{g(x_1)} - \frac{1}{g(x_2)}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为_____

14、设函数 $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ ， $g(x) = \frac{x}{e^x}$ ，对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ，不等式 $\frac{g(x_1)}{k} \leq \frac{f(x_2)}{k+1}$ 恒成立，则正数 k 的取值范围是_____

15、记曲线 $f(x) = -e^x - 2x$ 上任意一点处的切线为 l_1 ，总存在过 $g(x) = ax + 3\cos x$ 上一点处的切线为 l_2 ，使得 $l_1 \perp l_2$ ，则实数 a 的取值范围是_____

第8讲 原函数导函数混合还原

一. 导数的常见构造

1. 对于 $f'(x) > g'(x)$, 构造 $h(x) = f(x) - g(x)$

更一般地, 遇到 $f'(x) > a (a \neq 0)$, 即导函数大于某种非常数(若 $a=0$, 则无需构造),

则可构 $h(x) = f(x) - ax$

2. 对于 $f'(x) + g'(x) > 0$, 构造 $h(x) = f(x) + g(x)$

3. 对于 $f'(x) + f(x) > 0$, 构造 $h(x) = e^x f(x)$

4. 对于 $f'(x) > f(x)$ [或 $f'(x) - f(x) > 0$], 构造 $h(x) = \frac{f(x)}{e^x}$

5. 对于 $xf'(x) + f(x) > 0$, 构造 $h(x) = xf(x)$

6. 对于 $xf'(x) - f(x) > 0$, 构造 $h(x) = \frac{f(x)}{x}$

7. 对于 $\frac{f'(x)}{f(x)} > 0$, 分类讨论: (1)若 $f(x) > 0$, 则构造 $h(x) = \ln f(x)$;

(2)若 $f(x) < 0$, 则构造 $h(x) = \ln[-f(x)]$;

二. 对于抽象函数而言, 在构造函数时我们必须从以下方面考虑: 函数的奇偶性、单调性、对称性、周期性等方面考虑, 如果题目给出的条件已经是最简的, 则从问题入手; 否则反向考虑。

例: (2015 课标 2 卷理 12) 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x \in R)$ 的导函数, $f(-1) = 0$, 当

$x > 0$ 时, $xf'(x) - f(x) < 0$, 则使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 ()

(A) $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ (B) $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ (C) $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ (D) $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

变式 1. 函数 $f(x)$ 的定义域是 R , $f(0) = 2$, 对任意 $x \in R, f(x) + f'(x) > 1$, 则不等式

$e^x \cdot f(x) > e^x + 1$ 的解集为 ()

(A) $\{x | x > 0\}$ (B) $\{x | x < 0\}$ (C) $\{x | x < -1 \text{ 或 } 0 < x < 1\}$ (D) $\{x | x > 1 \text{ 或 } x < -1\}$

变式 2. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0)$ 上的可导函数, 其导函数为 $f'(x)$, 且有 $3f(x) + xf'(x) > 0$, 则不等式 $(x+2015)^3 f(x+2015) + 27f(-3) > 0$ 的解集是 ()

(A) $(-2018, -2015)$ (B) $(-\infty, -2016)$ (C) $(-2016, -2015)$ (D) $(-\infty, -2012)$

变式 3. 设函数 $f(x)$ 在 R 上存在导数 $f'(x)$, $\forall x \in R$, 有 $f(x) + f(-x) = x^2$, 在 $(0, +\infty)$ 上 $f'(x) < x$, 若 $f(4-m) - f(m) \geq 8 - 4m$, 则实数 m 的取值范围为 ()

(A) $[-2, 2]$ (B) $[2, +\infty)$ (C) $[0, +\infty)$ (D) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

课后练习:

1、已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(2) = 1$, 且 $f(x)$ 的导函数 $f'(x) > x - 1$, 则不等式 $f(x) < \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ 的解集为 ()

(A) $(-2, 2)$ (B) $(2, +\infty)$ (C) $(-\infty, 2)$ (D) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

2、已知定义在 R 上的可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 满足 $f'(x) < f(x)$, 且 $f(x+2)$ 为偶函数, $f(4) = 1$, 则不等式 $f(x) < e^x$ 的解集为 ()

(A) $(-2, +\infty)$ (B) $(0, +\infty)$ (C) $(1, +\infty)$ (D) $(4, +\infty)$

3、若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + f'(x) > 1$, $f(0) = 4$, 则不等式 $f(x) > \frac{3}{e^x} + 1$ (e 为自然对数的底数) 的解集为 ()

(A) $(0, +\infty)$ (B) $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ (C) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (D) $(3, +\infty)$

4、已知函数 $f(x)$ 对定义域 R 内的任意 x 都有 $f(x) = f(4-x)$, 且当 $x \neq 2$ 时, 其导函数 $f'(x)$ 满足 $xf'(x) > 2f'(x)$, 若 $2 < a < 4$, 则 ()

(A) $f(2^a) < f(3) < f(\log_2 a)$ (B) $f(3) < f(\log_2 a) < f(2^a)$

(C) $f(\log_2 a) < f(3) < f(2^a)$ (D) $f(\log_2 a) < f(2^a) < f(3)$

5、定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足: $f(x) > 1 - f'(x)$, $f(0) = 0$, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数,

则不等式 $e^x f(x) > e^x - 1$ (其中 e 为自然对数的底数) 的解集为 ()

- (A) $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ (B) $(0, +\infty)$ (C) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ (D) $(-1, +\infty)$

6、已知函数 $y = f(x)$ 对于任意的 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 满足 $f'(x) \cos x + f(x) \sin x > 0$ (其中

$f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数), 则下列不等式不成立的是 ()

- (A) $\sqrt{2}f(\frac{\pi}{3}) < f(\frac{\pi}{4})$ (B) $\sqrt{2}f(-\frac{\pi}{3}) < f(-\frac{\pi}{4})$
(C) $f(0) < \sqrt{2}f(\frac{\pi}{4})$ (D) $f(0) < 2f(\frac{\pi}{3})$

7、 $f(x), g(x)(g(x) \neq 0)$ 分别是定义在 R 上的奇函数和偶函数, 当 $x < 0$ 时,

$f'(x)g(x) < f(x)g'(x)$, 且 $f(-3) = 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ 的解集为 ()

- (A) $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ (B) $(-3, 0) \cup (0, 3)$
(C) $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$ (D) $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$

8、函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 对 $\forall x \in R$, 都有 $2f'(x) > f(x)$ 成立, 若 $f(\ln 4) = 2$,

则不等式 $f(x) > e^{\frac{x}{2}}$ 的解是 ()

- (A) $x > \ln 4$ (B) $0 < x < \ln 4$ (C) $x > 1$ (D) $0 < x < 1$

9、设 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, 且 $f(2) = 0$, 当 $x > 0$ 时, 有 $\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} < 0$ 恒成立,

则不等式 $x^2 f(x) > 0$ 的解集为 ()

- (A) $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ (B) $(-2, 0) \cup (0, 2)$
(C) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ (D) $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

10、已知一函数满足 $x > 0$ 时，有 $g'(x) = 2x^2 > \frac{g(x)}{x}$ ，则下列结论一定成立的是 ()

- (A) $\frac{g(2)}{2} - g(1) \leq 3$ (B) $\frac{g(2)}{2} - g(1) \geq 2$ (C) $\frac{g(2)}{2} - g(1) < 4$ (D) $\frac{g(2)}{2} - g(1) \geq 4$

11、定义在区间 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 使不等式 $2f(x) < xf'(x) < 3f(x)$ 恒成立，其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数，则 ()

- (A) $4 < \frac{f(2)}{f(1)} < 8$ (B) $8 < \frac{f(2)}{f(1)} < 16$ (C) $3 < \frac{f(2)}{f(1)} < 4$ (D) $2 < \frac{f(2)}{f(1)} < 3$

12、已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，图像关于 y 轴对称，且当 $x < 0$ 时，

$f'(x) > \frac{f(x)}{x}$ 恒成立，设 $a > 1$ ，则 $\frac{4af(a+1)}{a+1}, 2\sqrt{a}f(2\sqrt{a}), (a+1)f(\frac{4a}{a+1})$ 的大小关系为

- ()
- (A) $\frac{4af(a+1)}{a+1} > 2\sqrt{a}f(2\sqrt{a}) > (a+1)f(\frac{4a}{a+1})$
 (B) $\frac{4af(a+1)}{a+1} < 2\sqrt{a}f(2\sqrt{a}) < (a+1)f(\frac{4a}{a+1})$
 (C) $2\sqrt{a}f(2\sqrt{a}) > \frac{4af(a+1)}{a+1} > (a+1)f(\frac{4a}{a+1})$
 (D) $2\sqrt{a}f(2\sqrt{a}) < \frac{4af(a+1)}{a+1} < (a+1)f(\frac{4a}{a+1})$

13、已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ， $\forall x \in (0, +\infty)$ ，都有 $xf'(x) < 2f(x)$ 成立，则 ()

- (A) $2f(\sqrt{3}) > 3f(\sqrt{2})$ (B) $2f(1) < 3f(\sqrt{2})$
 (C) $4f(\sqrt{3}) < 3f(2)$ (D) $4f(1) > f(2)$

14、已知奇函数 $f(x)$ 满足：对 $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ 且 $x_1 \neq x_2$ ，有 $\frac{x_1f(x_1) - x_2f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 恒成

立，若 $a = 2^{0.2}f(2^{0.2}), b = (\ln 2)f(\ln 2), c = (\log_2 \frac{1}{4})f(\log_2 \frac{1}{4})$ ，则 a, b, c 的大小关系为_____ (用“>”表示)

第9讲 导数中的距离问题

1、(2012 全国卷 1 理 12) 设点 P 在曲线 $y = \frac{1}{2}e^x$ 上, 点 Q 在曲线 $y = \ln(2x)$ 上, 则 $|PQ|$ 最小值为 ()

- (A) $1 - \ln 2$ (B) $\sqrt{2}(1 - \ln 2)$ (C) $1 + \ln 2$ (D) $\sqrt{2}(1 + \ln 2)$

2、直线 $x = m$ 与函数 $g(x) = \ln x$ 图像分别交于点 M, N , 则 $|MN|$ 最小值为 ()

- (A) $\frac{1 + \ln 3}{3}$ (B) $\frac{\ln 3}{3}$ (C) $\frac{1 - \ln 3}{3}$ (D) $\ln 3 - 1$

3、已知直线 $y = a$ 分别与函数 $y = e^{x+1}$ 和 $y = \sqrt{x-1}$ 交于 A, B 两点, 则 A, B 之间的最短距离是 ()

- (A) $\frac{3 - \ln 2}{2}$ (B) $\frac{5 - \ln 2}{2}$ (C) $\frac{3 + \ln 2}{2}$ (D) $\frac{5 + \ln 2}{2}$

4、已知点 M 在曲线 $y = 3 \ln x - x^2$ 上, 点 N 在直线 $x - y + 2 = 0$ 上, 则 $|MN|$ 的最小值是 _____

5、已知直线 $y = b$ 与函数 $f(x) = 2x + 3$ 和 $g(x) = ax + \ln x$ 分别交于 M, N 两点, 若 $|MN|$ 的最小值为 2, 则 $a + b =$ _____

6、已知变量 x, y 满足 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3 \ln x$, 点 Q 在直线 $y = 2x + \frac{1}{2}$ 上, 则 $(x - m)^2 + (y - n)^2$ 的最小值为 _____

7、直线 $y = a$ 分别与曲线 $y = 2(x+1), y = x + \ln x$ 交于 A, B 两点, 则 $|AB|$ 的最小值为 _____

8、若实数 a, b, c, d 满足 $\frac{2a^2 - \ln a}{b} = \frac{3c - 2}{d} = 1$, 则 $(a - c)^2 + (b - d)^2$ 的最小值为 _____

9、若实数 a, b, c, d 满足 $|b + a^2 - 4 \ln a| + |2c - d + 2| = 0$, 则 $(a - c)^2 + (b - d)^2$ 的最小值为 _____

10、已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x > 0 \\ \frac{3x}{2} + 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 若 $m < n$, 且 $f(m) = f(n)$, 则 $n - m$ 的范围是 _____

11、已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & x > 0 \\ \frac{1}{2}x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 若 $f(x_1) = f(x_2), x_1 \neq x_2$, 则 $|x_1 - x_2|$ 的范围是 _____

12、已知函数 $f(x) = (x - m)^3 + (x - me^m)^3 - 2ax (a \in R)$ 在 R 上单调递增, 则 a 的取值范围是 _____

第 10 讲 导数解答题

常用函数不等式

$$\left\{ \begin{array}{l} x-1 \geq \ln x \\ x \geq \ln(x+1) \\ \ln x \geq 1 - \frac{1}{x} \\ \frac{x^2-1}{2} \geq \ln x \\ x - \frac{1}{x} \geq 2 \ln x \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} > \ln(n+1) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} e^x \geq x+1 \\ e^{x-1} \geq x \\ e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2} \\ \frac{1}{e^x} \geq 1-x \\ \frac{e^{x+1}+e^{x-1}}{2} \geq x+1 \\ \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} < \ln n \end{array} \right.$$

不等式链: $a \neq b$

$$\sqrt{a^2-ab+b^2} > (a^a b^b)^{\frac{1}{a+b}} > \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{a+b} > \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{a+b}{2} > \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 > e^{-1} \left(\frac{b^a}{a^b}\right)^{\frac{1}{b-a}} > \frac{b-a}{\ln b - \ln a} > \sqrt{ab} > \frac{\ln b - \ln a}{b-a} > e^{\left(\frac{a^b}{b^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}} > \frac{2ab}{a+b} > (a^b b^a)^{\frac{1}{a+b}}$$

对数均值不等式:

$$\frac{a+b}{2} > \frac{b-a}{\ln b - \ln a} > \sqrt{ab} \quad (\text{用来解决极值点偏移问题})$$

对数不等式 (用来证明对数均值不等)

$$\forall 0 < x < 1, \frac{x-1}{\sqrt{x}} < \ln x < \frac{2(x-1)}{x+1}$$

$$\forall x > 1, \frac{2(x-1)}{x+1} < \ln x < \frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

【基础典例分析】

例: 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{ax}{x+1} (a \geq 1)$

(I) 讨论 $f(x)$ 零点的个数;

(II) 证明: $\frac{2}{2n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{3}{3n+1}, n \in N^*$

【近七年高考全国卷I】

(2017年高考全国卷I) 已知函数 $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x$

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围

(2016年高考全国卷I) 已知函数 $f(x) = (x-2)e^x + a(x-1)^2$ 有两个零点

(I) 求 a 的取值范围

(II) 设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点, 证明: $x_1 + x_2 < 2$

(2015年高考全国卷I) 已知函数 $f(x) = x^3 + ax + \frac{1}{4}$, $g(x) = -\ln x$

(I) 当 a 为何值时, x 轴为曲线 $y = f(x)$ 的切线

(II) 用 $\min\{m, n\}$ 表示 m, n 中的最小值, 设函数 $h(x) = \min\{f(x), g(x)\} (x > 0)$, 讨论 $h(x)$ 零点的个数

(2014 年高考全国卷 I) 设函数 $f(x) = ae^x \ln x + \frac{be^{x-1}}{x}$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的

切线为 $y = e(x-1) + 2$

(I) 求 a, b

(II) 证明: $f(x) > 1$

(2013 年高考全国卷 I) 设函数 $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = e^x(cx + d)$, 若曲线 $y = f(x)$ 和曲线 $y = g(x)$ 都过点 $P(0, 2)$, 且在点 P 处有相同的切线 $y = 4x + 2$

(I) 求 a, b, c, d 的值

(II) 若 $x \geq -2$ 时, $f(x) \leq kg(x)$, 求 k 的取值范围

(2012 年高考全国卷 I) 已知函数 $f(x) = f'(1)e^{x-1} - f(0)x + \frac{1}{2}x^2$

(I) 求 $f(x)$ 的解析式及单调区间

(II) 若 $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 + ax + b$, 求 $(a+1)b$ 的最大值

(2011 年高考全国卷 I) 已知函数 $f(x) = \frac{a \ln x}{x+1} + \frac{b}{x}$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线

方程为 $x + 2y - 3 = 0$

(I) 求 a, b 的值

(II) 如果当 $x > 0$ 且 $x \neq 1$ 时, $f(x) > \frac{\ln x}{x-1} + \frac{k}{x}$, 求 k 的取值范围

10.1 导数基础练习题

1、已知函数 $f(x) = x - \ln x$, $g(x) = x^2 - ax$

(I) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1](t > 0)$ 上的最小值 $m(t)$

(II) 令 $h(x) = g(x) - f(x)$, $A(x_1, h(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))(x_1 \neq x_2)$ 是函数 $h(x)$ 图像上任

意两点, 且满足 $\frac{h(x_1) - h(x_2)}{x_1 - x_2} > 1$, 求实数 a 的取值范围

(III) 若 $\exists x \in (0, 1]$, 使 $f(x) \geq \frac{a - g(x)}{x}$ 成立, 求实数 a 的最大值

2、已知函数 $f(x) = x \ln x$, $g(x) = -x^2 + ax - 3$

(I) 求函数 $f(x)$ 在 $[t, t+2](t > 0)$ 上的最小值

(II) 若存在 $x_0 \in [\frac{1}{e}, e]$, $2f(x_0) \geq g(x_0)$ 成立, 求实数 a 的取值范围

3、已知函数 $f(x) = x \ln x$, $g(x) = -x^2 + ax - 2$

(I) 求函数 $f(x)$ 在 $[t, t+2](t > 0)$ 上的最小值

(II) 若函数 $y = f(x) + g(x)$ 有两个不同的极值点 $x_1, x_2(x_1 < x_2)$ 且 $x_2 - x_1 > \ln 2$, 求实数 a 的取值范围

4、已知函数 $f(x) = \ln x$ ， $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - bx$

- (I) 函数 $f(x)$ 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线与函数 $g(x)$ 的图像相切，求实数 b 的值
- (II) 若函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ 在定义域上存在单调递减区间，求实数 b 的取值范围
- (III) 若 $b \geq 2$ ， $\forall x_1, x_2 \in [1, 2]$ ，且 $x_1 \neq x_2$ ，都有 $|f(x_1) - f(x_2)| > |g(x_1) - g(x_2)|$ 成立，求实数 b 的取值范围

5、设函数 $f(x) = ax^2 - a - \ln x$ ， $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{e}{e^x}$

- (I) 讨论 $f(x)$ 的单调性
- (II) 证明：当 $x > 1$ 时， $g(x) > 0$
- (III) 确定 a 的所有可能取值，使得 $f(x) > g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 区间内恒成立

6、函数 $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2 - bx$ ，函数 $f(x) = x + a \ln x$ 在 $x = 1$ 处的切线与直线 $x + 2y = 0$

垂直

- (I) 求实数 a 的值
- (II) 若函数 $g(x)$ 存在单调递减区间，求实数 b 的取值范围
- (III) 设 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 是函数 $g(x)$ 的两个极值点，若 $b \geq \frac{7}{2}$ ，求 $g(x_1) - g(x_2)$ 的最小值

7、已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{a+1}{2}x^2 + 1$

(I) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 求 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{e}, e]$ 上的最值

(II) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性

(III) 当 $-1 < a < 0$ 时, 有 $f(x) > 1 + \frac{a}{2} \ln(-a)$ 恒成立, 求 a 的取值范围

8、已知函数 $f(x) = ax + x \ln x$ 图像在点 $x = e$ 处的切线的斜率为 3

(I) 求实数 a 的取值范围

(II) 若 $f(x) \leq kx^2$ 对任意 $x > 0$ 成立, 求实数 k 的取值范围

(III) 当 $n > m > 1 (m, n \in N^*)$ 时, 证明: $\frac{\sqrt[n]{m}}{\sqrt[m]{n}} > \frac{m}{n}$

9、已知函数 $f(x) = x - \ln(x+a)$ 的最小值为 0, 其中 $a > 0$, 设函数 $g(x) = \ln x + \frac{m}{x}$

(I) 求 a 的值

(II) 对任意 $x_1 > x_2 > 0$, $\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} < 1$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围

(III) 讨论方程 $g(x) = f(x) + \ln(x+1)$ 在 $[1, +\infty)$ 上根的个数

10、已知函数 $f(x) = \ln x + a(1-x)$

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性

(II) 当 $f(x)$ 有最大值时，且最大值大于 $2a-2$ 时，求 a 的取值范围

10.2 分离参数类

11、已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 - 2x (a < 0)$

(I) 若函数 $f(x)$ 在定义域内单调递增，求实数 a 的取值范围

(II) 若 $a = \frac{1}{2}$ ，且关于 x 的方程 $f(x) = -\frac{1}{2}x + b$ 在 $[1, 4]$ 上恰有两个不等的实根，求实数 b 的取值范围

12、已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} + a(x - \ln x)$

(I) 当 $a > 0$ 时，试求 $f(x)$ 的单调区间

(II) 若函数 $f(x)$ 在 $x \in (\frac{1}{2}, 2)$ 上有三个不同的极值点，求实数 a 的取值范围

13、已知函数 $f(x)=e^x+ax-a$, $g(x)=2xe^x$

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性

(II) 若不等式 $f(x) > g(x)$ 有唯一正整数解, 求实数 a 的取值范围

14、已知函数 $f(x)=(x^2-ax-a)e^x$

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性

(II) 若 $a \in (0,2)$, 对于任意 $x_1, x_2 \in [-4,0]$, 都有 $|f(x_1)-f(x_2)| < 4e^{-2} + me^a$ 恒成立, 求 m 的取值范围

15、已知函数 $f(x)=\ln x-x+a+1$

(I) 若存在 $x \in (0,+\infty)$ 使得 $f(x) \geq 0$ 成立, 求实数 a 的取值范围

(II) 求证: 当 $x > 1$ 时, 在 (I) 的条件下, $\frac{1}{2}x^2+ax-a > x \ln x + \frac{1}{2}$ 成立

10.2 构造新函数类

16、已知函数 $f(x) = mx - a \ln x - m$, $g(x) = \frac{ex}{x^2}$

(I) 求 $g(x)$ 的极值

(II) 设 $m = 1, a < 0$, 若对任意的 $x_1, x_2 \in [3, 4] (x_1 < x_2)$, $|f(x_1) - f(x_2)| < \left| \frac{1}{g(x_1)} - \frac{1}{g(x_2)} \right|$

恒成立, 求 a 的最大值

(III) 设 $a = 2$, 若对 $\forall x_0 \in (0, e]$, 在区间 $(0, e]$ 上总存在 $t_1, t_2 (t_1 \neq t_2)$, 使得

$f(t_1) = f(t_2) = g(x_0)$ 成立, 求 m 的取值范围

17、已知 $f(x) = e^{2x} + \ln(x+a)$

(I) 当 $a = 1$ 时, ① $f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程; ② 当 $x \geq 0$ 时, 求证: $f(x) \geq (x+1)^2 + x$

(II) 若存在 $x_0 \in [0, +\infty)$, 使得 $f(x_0) < 2 \ln(x_0 + a) + x_0^2$ 成立, 求实数 a 的取值范围

18、已知函数 $f(x) = 2x - \frac{1}{x} - a \ln x (a \in R)$

(I) 当 $a = 3$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间

(II) $g(x) = f(x) - x + 2a \ln x$, $g(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 其中 $x_1 < x_2$, 若

$g(x_1) - g(x_2) > t$ 恒成立, 求 t 的取值范围

19、已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{2}x^2 - ax$ 有两个极值点

(I) 求实数 a 的取值范围

(II) 设 $f(x)$ 的两个极值点分别为 x_1, x_2 ，若不等式 $f(x_1) + f(x_2) < \lambda(x_1 + x_2)$ 恒成立，求 λ 的最小值

20、记 $\max\{m, n\}$ 表示 m, n 中的最大值，如 $\max\{3, \sqrt{10}\} = \sqrt{10}$ ，函数

$$f(x) = \max\{x^2 - 1, 2 \ln x\}, \quad g(x) = \max\{x + \ln x, ax^2 + x\}$$

(I) 求函数 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上的值域

(II) 试探讨是否存在实数 a ，使得 $g(x) < \frac{3}{2}x + 4a$ 对 $\forall x \in (1, +\infty)$ 恒成立？若存在，求 a 的取值范围；若不存在，请说明理由

21、已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ， $g(x) = a \ln x$

(I) 若曲线 $y = f(x) - g(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 $6x - 2y - 5 = 0$ ，求实数 a 的值

(II) 设 $h(x) = f(x) + g(x)$ ，若对任意两个不相等的正数 x_1, x_2 ，都有 $\frac{h(x_1) - h(x_2)}{x_1 - x_2} > 2$ 恒成立，求实数 a 的取值范围

(III) 若在 $[1, e]$ 上存在一点 x_0 ，使得 $f'(x_0) + \frac{1}{f'(x_0)} < g(x_0) - g'(x_0)$ 成立，求 a 的取值范围

22、已知函数 $f(x) = \ln x - x^2 + x$

(I) 证明：当 $a \geq 2$ 时，关于 x 的不等式 $f(x) < (\frac{a}{2} - 1)x^2 + ax - 1$ 恒成立

(II) 若正实数 x_1, x_2 满足 $f(x_1) + f(x_2) + 2f(x_1^2 + x_2^2) + x_1x_2 = 0$ ，证明： $x_1 + x_2 \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

23、已知定义在 R 上的函数 $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 6x + a$ 在区间 $(1, 2)$ 内有一个零点 x_0 ，

$g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数

(I) 求函数 $g(x)$ 的单调区间

(II) 设 $m \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$ ，函数 $h(x) = (m - x_0)g(x) - f(m)$ ，求证： $h(m)h(x_0) < 0$

10.4 导数中的函数不等式放缩

例：证明：（1） $e^x > \ln x + 2$ （2） $e^x \geq \sin x + 1$

24、已知 $f(x) = e^{x-1} - a(x+1)(x \geq 1)$ ， $g(x) = (x-1)\ln x$

（I）若 $f(x) \geq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围

（II）若在（I）的条件下，当 a 取最大值时，求证： $f(x) > g(x)$

25、已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$ ，曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 $y = bx + 1$

（I）求 a, b 的值

（II）求函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值

（III）证明：当 $x > 0$ 时， $e^x + (1-e)x - x \ln x - 1 > 0$

26、证明： $e^{-x} > -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{8}$

10.5 导数中的卡根思想

例 1: 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 (a \in R)$

(I) 求函数 $f(x)$ 的单调区间

(II) 若关于 x 的不等式 $f(x) \leq (a-1)x - 1$ 恒成立, 求整数 a 的最小值

例 2: 已知函数 $f(x) = x + \ln x$, $f'(x) > \frac{k}{\ln(x+1)+1}$ 恒成立, 求整数 k 的最大值

例 3: 已知函数 $f(x) = x + x \ln x$, 若 $k \in Z$, $(k-2)(x-2) < f(x)$ 对 $\forall x > 2$ 恒成立, 求 k 的最大值

27、已知函数 $f(x) = \ln x$, $h(x) = ax(a \in R)$

(I) 函数 $f(x)$ 的图像与 $h(x)$ 的图像无公共点, 求实数 a 的取值范围

(II) 是否存在实数 m , 使得对任意的 $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$, 都有函数 $y = f(x) + \frac{m}{x}$ 的图像在

$g(x) = \frac{e^x}{x}$ 的图像的下方? 若存在, 请求出整数 m 的最大值; 若不存在, 请说明理由

(参考数据: $\ln 2 = 0.6931, \ln 3 = 1.0986, \sqrt[3]{e} = 1.3956$)

28、已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2 + bx$, $g(x) = xe^x + b$, $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为

$$y = 2x - 1$$

(I) 求实数 a, b 的值

(II) 求证: $f(x) \leq g(x)$

10.6 洛必达法则应用

29、已知函数 $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ ，若对任意的 $x > 0$ ， $f(x) < kx^2 - \frac{1}{2}x + 1$ 恒成立，求 k 的最小值

30、已知函数 $f(x) = (1 - kx) \ln(x+1)$ ，若对任意的 $0 < x < 1$ ， $f(x) \geq x$ 恒成立，求 k 的取值范围

31、已知函数 $f(x) = a \ln x + x^2 - x$

(I) 当 $a > 0$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性

(II) 当 $x \geq 1$ 时， $f(x) \geq 0$ 恒成立，求 a 的取值范围

10.7 先构造，再赋值，证明和式或积式不等式

32、(2017 全国卷 III 理 21) 已知函数 $f(x) = x - 1 - a \ln x$

(I) 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立，求 a 的值

(II) 设 m 为整数，且对于任意正整数 n ， $(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2^2}) \cdots (1 + \frac{1}{2^n}) < m$ ，求 m 的最小值

33、已知函数 $f(x) = (x+1)\ln x - ax + 2$

(I) 当 $a = 1$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程

(II) 若函数 $f(x)$ 在定义域上具有单调性，求实数 a 的取值范围

(III) 求证： $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2} \ln(n+1)$, $n \in N^*$

34、已知函数 $f(x) = \ln(x+1)$ ， $g(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{x+2}$

(I) 求函数 $f(x)$ 的单调区间及最值

(II) 若对 $\forall x > 0$, $f(x) + g(x) > 1$ 恒成立，求 a 的取值范围

(III) 求证： $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n+1} < \ln(n+1)$ ($n \in N^*$)

35、已知函数 $f(x) = a(x^2 - 1) - \ln x$

(I) 若 $y = f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极小值, 求 a 的值

(II) 若 $f(x) \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围

(III) 求证: $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln n} > \frac{3n^2 - n - 2}{2n^2 + 2n}$

36、已知函数 $f(x) = \ln(1+ax) - \frac{2x}{x+2} (a > 0)$

(I) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 求 $f(x)$ 的极值

(II) 若 $a \in (\frac{1}{2}, 1)$, $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 试比较 $f(x_1) + f(x_2)$ 与 $f(0)$ 的大小

(III) 求证: $\frac{n(n-1)}{e^2} > n! (n \geq 2, n \in N)$

37、已知函数 $f(x) = ax \ln x - x + 1 (x \in R)$, 且 $f(x) \geq 0$

(1) 求 a ;

(2) 求证: 当 $n \in N^*$ 时, $\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \frac{1}{n^2+3} + \dots + \frac{1}{4n^2} < 2 \ln 2$

10.8 极值点偏移问题

38、已知函数 $f(x) = e^x - ax$ 有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ ，则下面说法正确的是 ()

(A) $x_1 + x_2 < 2$

(B) $a < e$

(C) $x_1 x_2 > 1$

(D) 有极小值点 x_0 ，且 $x_1 + x_2 < 2x_0$

39、已知函数 $f(x) = \frac{a}{x} + \ln x - 3$ 有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$

(I) 求证: $0 < a < e^2$

(II) 求证: $x_1 + x_2 > 2a$

40、已知函数 $f(x) = -\frac{1}{2}ax^2 + (a-1)x + \ln x, a \in R$

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性

(II) 证明: 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(1-x) < f(1+x)$

(III) 若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 比较 $f'(\frac{x_1+x_2}{2})$ 与 0 的大小, 并证明你的结论

41、设函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (a-1)x - a \ln x$

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性

(II) 若 $f(x) = b$ 有两个不相等的实数根 $x_1 < x_2$, 求证: $f'(\frac{x_1+x_2}{2}) > 0$

42、已知函数 $f(x) = x^2 + \ln(x+a)$

(I) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性

(II) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 求证: 无论实数 a 取什么都有

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f(\frac{x_1+x_2}{2})$$

43、已知函数 $f(x) = \frac{m}{x} + \frac{1}{2} \ln x - 1$ 的两个零点为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$

(I) 求实数 m 的取值范围

(II) 求证: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > \frac{2}{e}$

10.9 多元变量消元思想

44、已知函数 $f(x) = \ln \frac{1}{x} - ax^2 + x (a > 0)$

(I) 若 $f(x)$ 是定义域上不单调的函数，求 a 的取值范围

(II) 若 $f(x)$ 在定义域上有两个极值点 x_1, x_2 ，证明： $f(x_1) + f(x_2) > 3 - 2\ln 2$

45、已知函数 $f(x) = x^2 - 1 - a \ln(1-x)$

(I) 若函数 $f(x)$ 为定义域上的单调函数，求实数 a 的取值范围

(II) 若函数 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 ，且 $x_1 < x_2$ ，证明： $\frac{f(x_1)}{x_2} > \frac{f(x_2)}{x_1}$

46、已知函数 $f(x) = \ln x$

(I) 若曲线 $g(x) = f(x) + \frac{a}{x} - 1$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线与直线 $x + 2y - 1 = 0$ 平行，求 a 的值

(II) 若 $h(x) = f(x) - \frac{b(x-1)}{x+1}$ 在定义域上是增函数，求实数 b 的取值范围；

(III) 若 $m > n > 0$ ，求证： $\frac{m-n}{m+n} < \frac{\ln m - \ln n}{2}$

47、已知函数 $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程为 $x+y+3=0$

(I) 求函数 $f(x)$ 的解析式

(II) 设 $g(x) = \ln x$, 当 $x \in [1, +\infty)$ 时, 求证: $g(x) \geq f(x)$

(III) 已知 $0 < a < b$, 求证: $\frac{\ln b - \ln a}{b-a} > \frac{2a}{a^2+b^2}$

48、已知函数 $f(x) = \ln x + mx (m \in R)$

(I) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间

(II) 当 $m \leq -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时, 设 $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2$ 的两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 恰为

$h(x) = 2 \ln x - ax - x^2$ 的零点, 求 $y = (x_1 - x_2)h\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ 的最小值

10.10 导数解决含有 $\ln x$ 与 e^x 的证明题 (凹凸反转)

49、设函数 $f(x) = \ln x - e^x$, $g(x) = a(x^2 - 1) - \frac{1}{x}$

(I) 判断函数 $y = f(x)$ 零点的个数, 并说明理由

(II) 记 $h(x) = g(x) - f(x) + \frac{e^x - ex}{xe^x}$, 讨论 $h(x)$ 的单调性

(III) 若 $f(x) < g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围

50、设函数 $f(x) = e^x \ln x + \frac{2e^{x-1}}{x}$, 证明: $f(x) > 1$

51、设函数 $f(x) = \frac{x+1}{e^x}(1-x-x\ln x)$, 证明: $f(x) < 1 + \frac{1}{e^2}$

52、设函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x} - x$

(I) 当 $a = -2$ 时, 求 $f(x)$ 的极值

(II) 当 $a = 1$ 时, 证明: $f(x) - \frac{1}{e^x} + x > 0$ 在 $(0, +\infty)$

10.11 导数解决含三角函数式的证明

53、已知函数 $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$

- (1) 证明：函数 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增
- (2) 若 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $f(x) > mx^2$, 求 m 的取值范围

54、已知函数 $f(x) = \ln(e^x + a)$ 是实数集 R 上的奇函数, 函数 $g(x) = \lambda f(x) + \sin x$ 是区间

$[-1, 1]$ 上的减函数

- (I) 求 a 的值
- (II) 若 $g(x) \leq t^2 + \lambda t + 1$ 在 $x \in [-1, 1]$ 及 λ 所在的取值范围上恒成立, 求 t 的取值范围
- (III) 讨论关于 x 的方程 $\frac{\ln x}{f(x)} = x^2 - 2ex + m$ 的根的个数

55、已知函数 $f(x) = ax^2 + 2x + b \cos x$ 在点 $P(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线方程为 $y = \frac{3\pi}{4}$

- (I) 求 a, b 的值
- (II) 若 $f(x_1) = f(x_2)$, 且 $0 < x_1 < x_2 < \pi$, 求证: $f'(\frac{x_1 + x_2}{2}) < 0$
- (参考公式: $\cos \theta - \cos \varphi = 2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \sin \frac{\theta - \varphi}{2}$)

56、设 $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x - 1$

(I) 求证：当 $x \geq 0$ 时， $f(x) \geq 0$

(II) 若不等式 $e^{ax} \geq \sin x - \cos x + 2$ 对任意的 $x \geq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围

57、已知函数 $f(x) = e^x \sin x$

(I) 求函数 $f(x)$ 的单调区间

(II) 如果对于任意的 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ， $f(x) \geq kx$ 恒成立，求实数 k 的取值范围

(III) 函数 $F(x) = f(x) + e^x \cos x, x \in [-\frac{2015\pi}{2}, \frac{2017\pi}{2}]$ ，过点 $M(\frac{\pi-1}{2}, 0)$ 作函数 $F(x)$

的图像的所有切线，令各切点的横坐标构成数列 $\{x_n\}$ ，求数列 $\{x_n\}$ 的所有项之和 S 的值

58、已知 $f(x) = \sin x - \cos x - ax$

(I) 若 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调，求实数 a 的取值范围

(II) 证明：当 $a = \frac{2}{\pi}$ 时， $f(x) \geq -1$ 在 $[0, \pi]$ 上恒成立

10.12 隐零点问题

59、设函数 $f(x) = e^x - ax - 2$.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若 $a=1$, k 为整数, 且当 $x > 0$ 时, $(x-k)f'(x) + x + 1 > 0$, 求 k 的最大值.

60、已知函数 $f(x) = e^x - \ln(x+m)$.

(I) 设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 求 m , 并讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 当 $m \leq 2$ 时, 证明 $f(x) > 0$.

61、已知函数 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 + ax + 1$ 在 $(-1, 0)$ 上有两个极值点 x_1 、 x_2 , 且 $x_1 < x_2$.

(I) 求实数 a 的取值范围;

(II) 证明: $f(x_2) > \frac{11}{12}$.

62、已知 $a \in R$ ，函数 $f(x) = e^x + ax^2$ ； $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数.

(I) 当 $a = -\frac{1}{2}$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(II) 当 $a > 0$ 时，求证：存在唯一的 $x_0 \in \left(-\frac{1}{2a}, 0\right)$ ，使得 $g(x_0) = 0$ ；

(III) 若存在实数 a, b ，使得 $f(x) \geq b$ 恒成立，求 $a - b$ 的最小值.

63、已知函数 $f(x) = -2(x+a)\ln x + x^2 - 2ax - 2a^2 + a$ ，其中 $a > 0$.

(I) 设 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，讨论 $g(x)$ 的单调性；

(II) 证明：存在 $a \in (0, 1)$ ，使得 $f(x) \geq 0$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内恒成立，且 $f(x) = 0$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内有唯一解.

10.13 端点效应

64、（2007 全国I卷理）设函数 $f(x) = e^x - e^{-x}$ ，若对所有 $x \geq 0$ ，都有 $f(x) \geq ax$ ，求 a 的取值范围

65、（2012 天津理）设函数 $f(x) = x - \ln(x+1)$ ，若对任意的 $x \geq 0$ ，有 $f(x) \leq kx^2$ ，求实数 k 的最小值

66、（2012 大纲理）设函数 $f(x) = ax + \cos x, x \in [0, \pi]$ ，设 $f(x) \leq 1 + \sin x$ ，求 a 的取值范围

67、（2016 全国II卷文）已知函数 $f(x) = (x+1)\ln x - a(x-1)$ ，若对 $x \in (1, +\infty)$ 时， $f(x) > 0$ ，求 a 的取值范围

10.14 其它省市高考导数真题研究

(2008 江西理 22) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{\frac{ax}{ax+8}}$, $x \in (0, +\infty)$

(I) 当 $a=8$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间

(II) 对于任意正数 a , 证明: $1 < f(x) < 2$

(2008 辽宁理 22) 设函数 $f(x) = \frac{\ln x}{1+x} - \ln x + \ln(x+1)$

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值

(II) 是否存在实数 a , 使得关于 x 的不等式 $f(x) \geq a$ 的解集为 $(0, +\infty)$? 若存在, 求 a 的取值范围; 若不存在, 试说明理由

(2014 湖北卷理 22) π 是圆周率, $e = 2.71828\dots$ 为自然对数的底数

(I) 求函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的单调区间

(II) 求 $e^3, 3^e, e^\pi, \pi^e, 3^\pi, \pi^3$ 这 6 个数中最大数和最小数

(III) 将 $e^3, 3^e, e^\pi, \pi^e, 3^\pi, \pi^3$ 这 6 个按从小到大的顺序排列, 并证明你的结论

(2014 湖南卷理 22) 已知常数 $a > 0$, 函数 $f(x) = \ln(1+ax) - \frac{2x}{x+2}$

(I) 讨论 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性

(II) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 且 $f(x_1) + f(x_2) > 0$, 求 a 的取值范围