手把手教你攻破中考数学难题

——中考数学压轴题思维可视化训练模型

中考二次函数压轴题既是智慧的挑战，更是耐心、决心、解题心理素质的考验！"数学思维可视化训练"模型，能够有效的促进学生思考（数学教学的最大问题就是没有有效的手段去促进学生积极主动思考）；能够直观的反映数学问题的本质（"条件知识"与"结论知识"之间的逻辑联系）；能够准确的诊断数学中等生的"疑难位置"（以便对症治疗）.让我们一起努力30天，共同期待，数学中等生们对二次函数压轴题的感受能够发生积极的变化：压轴题很难→压轴题并不很难→困难只有一点点→我有信心挑战压轴题！

已知抛物线 $y_n=-(x-a_n)^2+a_n$（n 为正整数，且 $0<a_1<a_2<\ldots<a_n$）与 x 轴的交点为 A_{n-1}（b_{n-1},0）和 $A_n(b_n,0)$，当 $n=1$ 时，第1条抛物线 $y_1=-(x-a_1)^2+a_1$ 与 x 轴的交点为 A_0（0，0）和 A_1（b_1，0），其他依此类推．

（1）求 a_1,b_1 的值及抛物线 y_2 的解析式；

（2）抛物线 y_3 的顶点坐标为（　，　）；

依此类推第 n 条抛物线 y_n 的顶点坐标为（　，　）；

所有抛物线的顶点坐标满足的函数关系是（　，　）；

（3）探究下列结论：

①若用 $A_{n-1}A_n$ 表示第 n 条抛物线被 x 轴截得得线段长，直接写出 A_0A_1 的值，并求出 $A_{n-1}A_n$；

②是否存在经过点 A（2，0）的直线和所有抛物线都相交，且被每一条抛物线截得得线段的长度都相等？若存在，直接写出直线的表达式；若不存在，请说明理由．

请你先做做看，会遇到"哪些疑难"?

一看到 y_n 、a_n、A_n 是不是就吓懵了？这题还怎么做?

疑难1：怎样理解"符号语言（y_n 、a_n、A_n 的数学意义"？

疑难2：怎样解"含参数的一元二次方程"？

疑难3：怎样解"是否存在"型问题？

一 怎样进行"有序思考"

解决数学难题，需要具备"有序思考"的能力（请关注思考的顺序！及时发现疑难问题）:

1.分解条件 **2.理解条件**

条件1

"括号内的说明"头等 重要

n为正整数 $\xrightarrow{1.1}$ n可以取1,2,3,4…（字母问题数字化）有n条抛物线

且$0<a_1<a_2<\dots<a_n$ $\xrightarrow{1.2}$ 不等式中有（n+1）个数 从左到右是由小到大

抛物线$y_n=-(x-a_n)^2+a_n$与x轴的交点为$A_{n-1}(b_{n-1},0)$和$A_n(b_n,0)$

$\xrightarrow{1.3}$

画图能力质疑（画图靠 分析，一图抵千军万马）？

函数性质：

$a=-1$ → 开口向下 抛物线族 相互全等

对称轴$x=a_n$

顶点坐标（a_n，a_n）

函数转换方程：b_{n-1}，b_n都是$0=-(x-a_n)^2+a_n$的根（字母问题数字化）

条件2

当n = 1时，第一条抛物线$y_1=-(x-a_1)^2+a_1$与x轴的交点为$A_0(0,0)$和$A_1(b_1,0)$

$\xrightarrow{2}$ 画图能力、函数性质、函数转换方程（类比）$\xrightarrow{1.3}$

0和b_1都是$0=-(x-a_1)^2+a_1$的根

条件3 其它依次类推

"条件 2"类推 $\xrightarrow{3.1}$

$n=2$时，$y_2=-(x-a_2)^2+a_2$与x轴的交点为$A_1(b_1,0)$和$A_2(b_2,0)$

$n=3$时，$y_3=-(x-a_3)^2+a_3$与x轴的交点为$A_2(b_2,0)$和$A_3(b_3,0)$（字母问题数字化）

"解题方法"类推（注 意观察字母中的足码规律）$\xrightarrow{3.2}$

"解题结果"类推 $\xrightarrow{3.3}$

条件 4 函数性质→重视每个交点的坐标

条件 5 数学思想方法全部搬来→与函数问题相关联的数学思想方法全部搬出来

用足条件•题目可解（用足条件“ 推可知→思路自然合理←知需想”论结住盯）

$$(1)\ ①\ a_1\rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{找}a_1\text{的所有条件}\rightarrow\left[\begin{array}{l}\underrightarrow{1.2}\rightarrow 0\langle a_1\langle a_2\\ \underrightarrow{2}\rightarrow 0=-(0-a_1)^2+a_1\rightarrow\text{可解}\end{array}\right]\rightarrow a_1=1\\ \leftarrow\text{盯住结论“想需知”}\quad\leftarrow\text{求}a_1\text{的思路有哪些}\end{array}\right]\downarrow$$

$$②b_1\left[\begin{array}{l}\rightarrow\text{找}b_1\text{的所有条件}\rightarrow\underrightarrow{2}\left[\begin{array}{l}\rightarrow 0=-(x-a_1)^2+a_1\rightarrow\text{可解}x\\ \rightarrow 0=-(b_1-a_1)^2+a_1\rightarrow\text{可解}b_1(\ b_1\text{方程蹦出来）}\\ \rightarrow A_0\text{和}A_1\text{是不同的点}\rightarrow 0\neq b_1\\ \rightarrow\text{优秀生的发展条件}a_1=1(\text{注意前后结论的联系）}\end{array}\right]\rightarrow b_1=2\downarrow\\ \leftarrow\text{盯住结论“想需知”}\quad\leftarrow\end{array}\right.$$

$$③y_2\left[\begin{array}{l}\text{找}a_2\text{的所有条件（因为求}y_2\leftarrow a_2\text{，所有求}a_2\text{需找}a_2\text{的所有条件}\underrightarrow{1.2}\underrightarrow{3.1})\cdots\cdots\cdots\\ \leftarrow\qquad\text{需}a_2\leftarrow\qquad\left[\begin{array}{l}\underrightarrow{1.2}\rightarrow a_1\langle a_2\langle a_3\\ \left[\begin{array}{l}\underrightarrow{3.1}\rightarrow 0=-(b_1-a_2)^2+a_2\\ \text{优秀生的发展条件}b_1=2\end{array}\right]\rightarrow\text{可解}a_2\end{array}\right]\rightarrow a_2=4\cdots\cdots\downarrow\\ \qquad\uparrow\leftarrow\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\leftarrow\end{array}\right.$$

$$(2)①y_3\left[\begin{array}{l}\rightarrow\text{找}a_3\text{的所有条件}\underrightarrow{1.2}\underrightarrow{3.1}\text{；找}b_2\text{的所有条件}\underrightarrow{3.1}\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \leftarrow\text{需}a_3\leftarrow\left\{\begin{array}{l}\underrightarrow{1.2}\rightarrow a_2\langle a_3\langle a_4\\ \left[\begin{array}{l}\underrightarrow{3.1}\quad 0=-(b_2-a_3)^2+a_3\leftarrow\text{需}b_2(\text{疑难等待突破）}\leftarrow\cdots\cdots\\ \downarrow\quad 0=-(b_2-a_2)^2+a_2(\text{说明没有“用足条件 ”，导致疑难出现）}\\ \text{优秀生的发展条件}a_2=4\cdots\cdots\rightarrow\text{可解}b_2\end{array}\right]\end{array}\right.\end{array}\right]$$

$$②y_n\left[\begin{array}{l}\rightarrow\text{找}a_n\text{的所有条件}\underrightarrow{1.2}\underrightarrow{1.3}\underrightarrow{3.2}\underrightarrow{3.3}\cdots\cdots\cdots\\ \leftarrow\text{需}a_n\leftarrow\left[\begin{array}{l}\underrightarrow{1.2}\rightarrow a_{n-1}\langle a_n(\underrightarrow{1.3})\cdots\cdots\\ \underrightarrow{3.2}\rightarrow\text{发现规律}\cdots\cdots\\ \underrightarrow{3.3}\rightarrow a_1=1,\ a_2=4,\ a_3=9\cdots\end{array}\right]\rightarrow a_n=n^2\end{array}\right]$$

$$(3)①A_0A_1\text{的所有条件}\rightarrow b_1-0=2$$

$$②A_{n-1}A_n\leftarrow b_n-b_{n-1}\left[\begin{array}{l}\rightarrow\text{找}b_n-b_{n-1}\text{的所有条件}\rightarrow\left[\begin{array}{l}\underrightarrow{1.3}\underrightarrow{3.2}\underrightarrow{3.3}\\ \text{优秀生的发展条件}a_n=n^2\end{array}\right]\rightarrow\downarrow\\ \leftarrow\text{需}b_n,\ b_{n-1}\leftarrow 0=-(x-n^2)^2+n^2\cdots\cdots\cdots x\text{可解}\cdots\cdots\cdots\leftarrow\end{array}\right.$$

4.解后反思

最能提高学生“解题能力”的行为是 :“解完题后及时反思”（有几个中等生做过？几乎没有）！所以今后遇到了“有点难”的题，都要养成“解完题后及时反思”的习惯！解透一题，收获一题！

此题由 $y_1=-(x-1)^2+1$ 沿 $y=x$（$x=n^2$）平移而成，解题的根本是通过“点的坐标 < = > 线段长度”.另外，相邻的 2 条抛物线有一个交点在 x 轴上.这说明，该点的横坐标是 2 个方程的公共解.

反思 1 **运算能力至关重要**

二次函数问题的运算量都很大，我们要有充分的心理准备，并且前面的运算出错，会直接影响后面的答案.4 次解一元二次方程，考验的都是运算能力！

反思 2 **数形结合必定考**

“函数问题”（函数图形性质、几何图形性质）转换成“方程问题”（数量关系）是解题的关键！

反思 3 **对称轴的性质简化运算**

画图能力 $\left.\begin{array}{l}\text{如图，已求}a_2=1\\ \text{由（2）中的}A_0(0,0)\end{array}\right]\rightarrow b_1=2$

$\left.\begin{array}{l}\text{同理，已求出}a_2=4\\ \text{由已求}b_1=2\end{array}\right]\rightarrow b_2=6$，以此类推，$b_n$都可以直观的看出答案。

反思 4　a_2与b_n之间的关系

由解题过程可知：$\begin{array}{l}a_1\rightarrow b_1\rightarrow a_2\rightarrow b_2\rightarrow a_3\rightarrow\cdots\cdots\\ a_n=n^2,\ b_n=n^2+n\text{，所以}a_n+n=b_n\text{。}\end{array}$

现在请你扪心自问：这道题真的很难吗？这道题的核心就是求 a_n,b_n(以达到求出点的坐标与线段长的目的）！实质就是“函数问题”转换成“方程问题”！因此，我们平时的训练，就要当成中考考场，始终“沉着冷静、淡定从容”！

祝福大家：从今天开始，一题一题解透，你就能在中考考场上考出 96 分的成绩，成为真正的“数学优秀生”、甚至“数学尖子生”！

二　怎样进行“自觉分析”

（再次发现疑难！）

提升“解数学难题”的能力，需要具备**“自觉分析”的态度（请关注分析的内容）！**

1. 划分解题步骤（按小目标的个数划分）；

2.积累解题知识、技能、方法、经验；

3.画解题线路俯瞰图(有递进关系才要写）.

解：（1）∵ $y_1=-(x-a_1)^2+a_1$ 与 x 轴交于点 A_0（0，0），

∴ $-a_1^2+a_1=0$，∴ $a_1=0$ 或 1．

由已知可知 $a_1>0$，

∴ $a_1=1$． ①

这一步考查的知识、技能、方法有哪些？你能积累到哪些解题经验？

即 $y_1=-(x-1)^2+1$

方法一：令 $y_1=0$ 代入得：$-(x-1)^2+1=0$，

∴ $x_1=0$，$x_2=2$，

∴ y_1 与 x 轴交于 A_0（0，0），A_1（2，0）

∴ $b_1=2$，

方法二：∵ $y_1=-(x-a_1)^2+a_1$ 与 x 轴交于点 A_1（b_1，0），

∴ $-(b_1-1)^2+1=0$，$b_1=2$ 或 0，$b_{-1}=0$（舍去）.

∴ $b_1=2$． ②

这一步考查的知识、技能、方法有哪些？你能积累到哪些解题经验？

又∵ 抛物线 $y_2=-(x-a_2)^2+a_2$ 与 x 轴交于点 A_1（2，0），
∴ $-(2-a_2)^2+a_2=0$，
∴ $a_2=1$ 或 4，∵ $a_2>a_1$，∴ $a_2=1$（舍去）.

∴ 取 $a_2=4$，抛物线 $y_2=-(x-4)^2+4$． ③

这一步考查的知识、技能、方法有哪些？你能积累到哪些解题经验？

（2）（9，9）；
（n^2，n^2）
$y=x$．
详解如下：
∵ 抛物线 $y_2=-(x-4)^2+4$ 令 $y_2=0$ 代入得：$-(x-4)^2+4=0$，
∴ $x_1=2$，$x_2=6$．
∴ y_2 与 x 轴交于点 A_1（2，0），A_2（6，0）.
又∵ 抛物线 $y_3=-(x-a_3)^2+a_3$ 与 x 轴交于 A_2（6，0），
∴ $-(6-a_3)^2+a_3=0$
∴ $a_3=4$ 或 9，∵ $a_3>a_3$，∴ $a_3=4$（舍去），

即 $a_3=9$，∴ 抛物线 y_3 的顶点坐标为（9，9）. ④

这一步考查的知识、技能、方法有哪些？你能积累到哪些解题经验？

由抛物线 y_1 的顶点坐标为，y_2 的顶点坐标为，y_3 的顶点坐标为（9，9），依次类推抛物线 y_n 的顶点坐标为（n^2，n^2）. ⑤

这一步考查的知识、技能、方法有哪些？你能积累到哪些解题经验？

∵ 所有抛物线的顶点的横坐标等于纵坐标，

∴ 顶点坐标满足的函数关系式是：$y=x$； ⑥

这一步考查的知识、技能、方法有哪些？你能积累到哪些解题经验？

（3）∵ A_0（0，0），A_1（2，0），

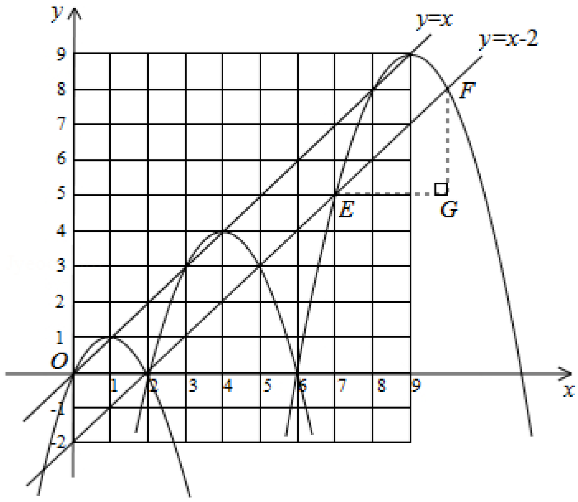
∴ $A_0A_1=2$． ⑦

这一步考查的知识、技能、方法有哪些？你能积累到哪些解题经验？

又∵ $y_n=-(x-n^2)^2+n^2$，
令 $y_n=0$，
∴ $-(x-n^2)^2+n^2=0$，
即 $x_1=n^2+n$，$x_2=n^2-n$，

∴ $A_{n-1}(n^2-n，0)$，$A_n(n^2+n，0)$，即 $A_{n-1}A_n=(n^2+n)-(n^2-n)=2n$． ⑧

这一步考查的知识、技能、方法有哪些？你能积累到哪些解题经验？



②存在．是平行于直线 $y=x$ 且过 A_1（2，0）的直线，其表达式为 $y=x-2$．

根据题意不难发现 a 的数值始终不变，这也说明二次函数的图像大小没有发生改变，且不管 a_n 的数值怎样变法，新得到的二次函数的顶点坐标都在直线 y=x 的图像上，即可以看作二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图像沿直线 y=x 平移时，结合图像可以知道：只要找出“一条平行于 y=x 且经过点 A（2,0）的直线”，则被抛物线截得的线段长度都相等.单从画图的角度来考虑：经过点 A（2,0）可以作无数条直线，则被抛物线截得的线段长度都相等的直线必经过（0,-2）.

这一步考查的知识、技能、方法有哪些？你能积累到哪些解题经验？

切记:平行、垂直是考试重点！

3. 解题线路俯瞰图：

千万要用上各个目标之间的递进关系

（1）①$a_1=1$ —— $y_1=-(x-1)^2+1$ —— $A_1(2,0)$,$A_0(0,0)$

②$b_1=2$ ←

③$y_2=-(x-4)^2+4$ —— $A_2(6,0)$

(2) ①$a_3=9$ ←

②$a_1=1$

$a_2=4$ → $a_n=n^2$ ⇨ $-(x-n^2)^2+n^2=0$

$a_3=9$

③(n^2,n^2) —— $x=n^2=y$ —— $y=x(x>0)$ ——

（3）①$A_0A_1=2-0$

②$A_{n-1}A_n=(n^2+n)-(n^2-n)$ ←

y=kx+b 经过点（2,0），又与 y=x 相关联（否则求它干什么？）←

三　怎样进行“疑难诊治”

中等生与优秀生的主要差别就是：疑难积累的量不同！优秀生通常会及时进行“疑难诊治”；而中等生容易一拖再拖，导致疑难积重难返！

疑难 1——怎样理解“符号语言的数学意义”

思考方法：从整体上看，y_n、a_n、A_n相当于 c 或 d，也相当于 5 或-3 等；分开来看，n 就是 y 和 *a* 的足码，与 y 和 *a* “形影不离”.如果不用足码,就算 26 个字母的大小写全用上,按照抛物线的解析式的结构来写,最多只能表示 50 个不同的函数.而用上足码,千千万万个不同的函数立马出现,可以表示“无限多个”不同的函数.

问题 1　人教版 8 年级数学课本P_{113}的$\bar{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}$的数学意义是 ________

问题 2　抛物线（族）$y_n=a(x-\frac{1}{2}b_{n-1})^2+k_n$交 X 轴于点 M（-2,0），$A_n(b_n,0)$(其中 n 为正整数).请写出它的意义.

随时总结：积累“解决问题”的思维方法：

疑难 2：怎样解“含参数的一元二次方程”？

思考方法：如果将参数“改成”数（比如 6），你肯定会做！那你就用刚才的方法，将数（比如 6）当成“参数”，就会做了.

问题 1 解方程$a^2x^2-4ax-5=0(a>0)$

问题 2 求 $y=-x^2+2kx-k^2+k+1$ 与 x 轴的交点坐标（用 k 表示）

随时总结：积累“解决问题”的思维方法：

疑难 3：怎样解“是否存在”型问题？

思考方法：假设“结论存在”，然后将“存在的这个结论”当“已知条件”用！再通过特例归纳，或推理证明，来确定“结论是否存在”.

问题 1 已知 O(0.0),A(3.-3),点 B 在抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2+2x$ 上，是否存在点 B，使△OAB 为直角三角形且 OA 为直角边，若存在，请求出点 B 的坐标；若不存在，请说明理由.

问题 2　O（0.0），A（0,- a^2+2a）,B（a,2a），△OAB 能否为等腰三角形？请证明.

随时总结：积累“解决问题”的思维方法：

四　怎样进行“举一反三”

“四基”落地、“四能”落实，全靠扎扎实实的解题训练（“四基”是指：基础知识、基本技能、基本思想方法、基本解题经验； “四能”是指：发现问题的能力、提出问题的能力、分析问题的能力、解决问题的能力）

1（**2014，江西，**12 分）如图 1，抛物线 $y=ax^2+bx+c$（a＞0）的顶点为 M，直线 y=m 与 x 轴平行，且与抛物线交于点 A，B，若△AMB 为等腰直角三角形，我们把抛物线上 A，B 两点之间的部分与线段 AB 围成的图形称为该抛物线对应的准蝶形，线段 AB 称为碟宽，顶点 M 称为碟顶，点 M 到线段 AB 的距离称为碟高．

（1）抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 对应的碟宽 为__4__；抛物线 $y=4x^2$ 对应的碟宽为__$\frac{1}{2}$__；抛物线 $y=ax^2$（a＞0）对应的碟宽为__$\frac{2}{a}$__；抛物线 $y=a(x-2)^2+3$（a＞0）对应的碟宽为__$\frac{2}{a}$__；

（2）抛物线 $y=ax^2-4ax-\frac{5}{3}$（a＞0）对应的碟宽为 6，且在 x 轴上，求 a 的值；

（3）将抛物线 $y=a_nx^2+b_nx+c_n$（a_n＞0）的对应准蝶形记为 F_n（n=1，2，3…），定义 F_1，F_2，…，F_n 为相似准蝶形，相应的碟宽之比即为相似比．若 F_n 与 F_{n-1} 的相似比为$\frac{1}{2}$，且 F_n 的碟顶是 F_{n-1} 的碟宽的中点，现将（2）中求得的抛物线记为 y_1，其对应的准蝶形记为 F_1．

①求抛物线 y_2 的表达式；

②若 F_1 的碟高为 h_1，F_2 的碟高为 h_2，…F_n 的碟高为 h_n，则 h_n=__$\frac{3}{2^{n+1}}$__，F_n 的碟宽有端点横坐标为__$2+\frac{3}{2^{n+1}}$__；F_1，F_2，…，F_n 的碟宽右端点是否在一条直线上？若是，直接写出该直线的表达式；若不是，请说明理由．

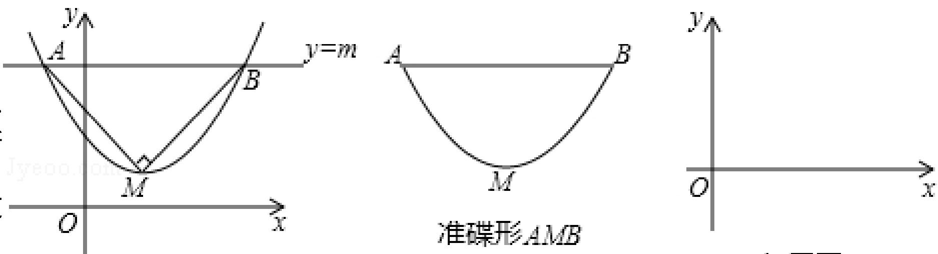


图1

备用图

2 （**2016年**，江西，12分）设抛物线的解析式为 $y=ax^2$，过点 B_1(1,0)作 x 轴的垂线，交抛物线于点 A_1(1,2)；过点 B_2($\frac{1}{2}$,0)作 x 轴的垂线，交抛物线于点 A_2；过点 $B_n\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1},0\right)$（n 为正整数）作 x 轴的垂线，交抛物线于点 A_n，连接 A_nB_{n+1}，得到 Rt△ $A_nB_nB_{n+1}$

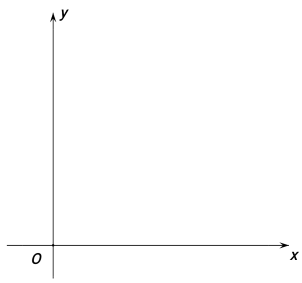
（1）求 a 的值

（2）直接写出线段 A_nB_n，B_nB_{n+1} 的长（用含 n 的式子表示）；

（3）在系列 Rt△ $A_nB_nB_{n+1}$ 中，探究下列问题；

①当 n 为何值时，Rt△ $A_nB_nB_{n+1}$ 是等腰直角三角形？

②设 Rt△ $1\le k<m\le n$（k,n 均为正整数），问：是否存在 Rt△ $A_kB_kB_{k+1}$ 与 Rt△ $A_nB_nB_{n+1}$ 相似？若存在，求出其相似比；若不存在，说明理由



3 （**2018年，江西**，12分）．小贤与小杰在探究某类二次函数问题时，经历了如下过程：

求解体验

(1)已知抛物线$y=-x^2+bx-3$经过点(-1,0),则b=__________，顶点坐标为______________，

该抛物线关于点(0,1）成中心对称的抛物线的表达式是_______________________________．

抽象感悟

我们定义：对于抛物线$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$,以y轴上的点$M(0,m)$为中心，作该抛物线关于点M对称的抛物线y'，则我们又称抛物线y'为抛物线y的“衍生抛物线”，点M为“衍生中心”.

(2)已知抛物线$y=-x^2-2x+5$关于点$(0,m)$的衍生抛物线为y'，若这两条抛物线有交

点，求

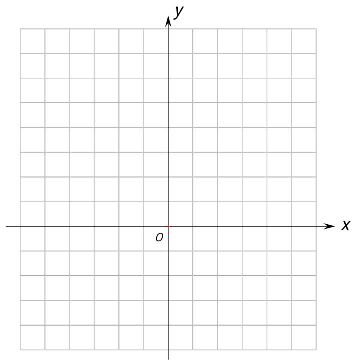
m的取值范围.

问题解决

(3) 已知抛物线$y=ax^2+2ax-b(a\neq 0)$

①若抛物线y的衍生抛物线为$y'=bx^2-2bx+a^2(b\neq 0)$,两抛物线有两个交点，且恰好是它们的顶点，求a，b的值及衍生中心的坐标；

②若抛物线y关于点$(0,k+1^2)$的衍生抛物线为y_1 ,其顶点为A_1；关于点$(0,k+2^2)$的衍生抛物线为y_2，其顶点为A_2；...；关于点$(0,k+n^2)$的衍生抛物线为y_n，其顶点为A_n；...(n为正整数).求A_nA_{n+1}的长(用含n的式子表示).



备用图

五　怎样进行“自我超越”

1.时刻琢磨怎样学才能“做一题会一类”？

2.时刻琢磨自己与尖子生的差距在哪里？

3.2 种学习方式的比较？

（1）以“记忆（模仿）”为主的学习方式

记忆记忆再记忆（模仿）→数学中等生之路

↓

省时省力→短期效率高效果好（蒙蔽人）→有意记忆→记忆力提升→搜索有用信息→低级模仿→高级模仿→拼命解题→解题能力减速提升（先快后慢）

（2）以“思考”为主的学习方式

以“思考”为主的学习方式→数学尖子生之路

费时费神（不仅是费力）→ 短期效率低效果差（不是事实）→ 毅力 → 决心 → 信心 → 通过已知探索未知 → 新的发现1 → 新的发现2 → 新的发现n → 产生数学灵感 → 更加热爱思考 → 1题1题解透 → 解题能力加速提升（先慢后快）

坚持到现在很不容易！请给自己唱一首赞歌！向尖子生致敬：“磨砺意志”!“挑战智慧”！

一定要让“难题低头”，这是勇者（百折不挠）和智者（善于变换思考角度）的万千豪气！

“举一反三”的答案

1. **【考点】** 二次函数解析式与图像性质，等腰直角三角形性质，探索规律.

【分析】 （1）根据准碟形的定义易算出含具体值的抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$、抛物线 $y=4x^2$ 的碟宽，且都利用第一象限端点 B 的横纵坐标的相等，类似推广至含字母的抛物线 $y=ax^2$（a＞0）.而抛物线 $y=a(x-2)^2+3$（a＞0）为顶点式，可看成 $y=ax^2$ 向右、向上平移得到，因而发现碟宽的规律，只与 a 有关，碟宽= $\frac{2}{a}$.

亦可先根据 $y=ax^2$ 画出二次函数的大致图像，根据题意并从图像分析可知，其准碟形碟宽两端点 A、B 和抛物线的顶点 M 围成的△AMB 是等腰直角三角形，进而知道 A、B 两点的纵坐标和横坐标绝对值相等，代入 $y=ax^2$ 即可求出二次项系数 a 与碟宽之间的关系式，而 $y=a(x-2)^2+3$（a＞0）为顶点式，可看成 $y=ax^2$ 平移得到，只与 a 有关.

（2）根据（1）中的结论，根据碟宽为 6，列出方程 $\frac{2}{a}=6$，求出 a 的值．

（3）①把(2)中求出的 a 代入，得出 y_1 的解析式，易推出 y_2．

②结合画图，易知 h_1，h_2，h_3，…，h_{n-1}，h_n 都在直线 x=2 上，但证明需要有一般推广，可以考虑 $h_n \parallel h_{n-1}$，且都过 F_{n-1} 的碟宽中点，进而可得．另外，画图时易知碟宽有规律递减，所以推理也可得右端点的特点．对于 F_1，F_2，…，F_n 的碟宽右端点是否在一条直线上，如果写出所有端点规律不可能，找规律更难，所以可以考虑基础的几个图形关系，如果相邻 3 个点构成的两条线段不共线，则结论不成立，反正结论成立．而最后一空的求直线表达式只需考虑特殊点即可．

解：（1）4、$\frac{1}{2}$、$\frac{2}{a}$、$\frac{2}{a}$.

∵ a＞0，∴ $y=ax^2$的图象大致如图 1，其必经过原点 O.

记线段 AB 为其准蝶形碟宽，AB 与 y 轴的交点为 C，连接 OA，OB．

∵ △OAB 为等腰直角三角形，AB∥ x 轴，

∴ OC⊥ AB，

∴ ∠ AOC=∠ BOC＝$\frac{1}{2}$∠ AOB＝$\frac{1}{2}$×90°=45°，

即△AOC=△BOC 亦为等腰直角三角形，∴ AC=OC=BC．

∴ $x_A=y_A$，$x_B=y_B$，即 A、B 两点 x 轴和 y 轴坐标绝对值相同．

代入 $y=ax^2$，得方程 $x=ax^2$，解得 $x=\frac{1}{a}$.

∴ 由图像可知，A（ -$\frac{1}{a}$，$\frac{1}{a}$），B（$\frac{1}{a}$，$\frac{1}{a}$），C（0，$\frac{1}{a}$），

即 AC=OC=BC＝$\frac{1}{a}$，

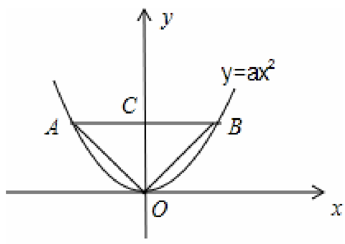


图 1

∴ AB=$\frac{1}{a}$·2＝$\frac{2}{a}$，

即 $y=ax^2$ 的碟宽为 AB＝$\frac{2}{a}$.

∴ ①抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$对应的 $a=\frac{1}{2}$，得碟宽$\frac{2}{a}$=4；

②抛物线 $y=4x^2$对应的 a=4，得碟宽$\frac{2}{a}$＝$\frac{1}{2}$；

③抛物线 $y=ax^2$(a＞0)的碟宽为$\frac{2}{a}$；

④抛物线 $y=a(x-2)^2+3$（a＞0）可看成 $y=ax^2$向右平移 2 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度后得到的图形，

∵ 平移不改变形状、大小、方向，

∴ 抛物线 $y=a(x-2)^2+3$（a＞0）的准碟形≌ 抛物线 $y=ax^2$的准碟，

∵ 抛物线 $y=ax^2$（a＞0），碟宽为$\frac{2}{a}$，

∴ 抛物线 $y=a(x-2)^2+3$（a＞0），碟宽为$\frac{2}{a}$.

（2）解法一：

∵ $y=ax^2-4ax-\frac{5}{3}=a(x-2)^2-(4a+\frac{5}{3})$

∴ 同（1）得其碟宽为$\frac{2}{a}$，

∵ $y=ax^2-4ax-\frac{5}{3}$的碟宽为 6，

∴ $\frac{2}{a}=6$，解得，$a=\frac{1}{3}$.

∴ $y=\frac{1}{3}(x-2)^2-3$.

解法二：

∵ $y=ax^2-4ax-\frac{5}{3}(a>0)$可得，$y=a(x-2)^2-4a-\frac{5}{3}$，

又已知碟宽在 x 轴上，

∴ 碟高 $=\left|-4a-\frac{5}{3}\right|=\frac{6}{2}=3$，解得 $a=\pm\frac{1}{3}$ ，

又∵ $a>0$，$a=-\frac{1}{3}$不合题意舍去，∴ $a_1=\frac{1}{3}$.

(3) ①解法一：

∵ F_1的碟宽：F_2的碟宽=2：1，

∴ $\frac{2}{a_1}:\frac{2}{a_2}=2:1$

∵ $a_1=\frac{1}{3}$,

∴ $a_2=\frac{2}{3}$.

∵ $y_1=\frac{1}{3}(x-2)^2-3$的碟宽 AB 在 x 轴上（A 在 B 左边），

∴ A（-1，0），B（5，0），

∴ F_2的碟顶坐标为（2，0），

∴ $y_2=\frac{2}{3}(x-2)^2$

解法二：

∵ $y_1=a(x-2)^2-4a-\frac{5}{3}$，$a=\frac{1}{3}$，

∴ $y_1=\frac{1}{3}(x-2)^2-3$，

即碟顶 M_1 的坐标为（2，-3）.

∵ F_2 的碟顶是的碟宽的中点，且 F_1 的碟宽线段在 x 轴上，

∴ F_2 的碟顶 M_2 的坐标为（2,0），设 $y_2=a_2(x-2)^2$ ，

∵ F_2 与 F_1 的相似比为 $\frac{1}{2}$ ，F_1 的碟宽为 6，

∴ F_2 的碟宽为 $6\times\frac{1}{2}=3$，即 $\frac{2}{a_2}=3$，$a_2=\frac{2}{3}$.

∴ $y_2=a_2(x-2)^2=\frac{2}{3}(x-2)^2=\frac{2}{3}(x^2-4x+4)=\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{3}x+\frac{8}{3}$.

②∵ F_n 的准碟形为等腰直角三角形，

∴ F_n 的碟宽为 $2h_n$ ，

∵ $\frac{2h_n}{2h_{n-1}}=\frac{1}{2}$

∴ $h_n=\frac{1}{2}h_{n-1}=(\frac{1}{2})^2h_{n-2}=(\frac{1}{2})^3h_{n-3}=\ldots=(\frac{1}{2})^{n-1}h_1$.

∵ $h_1=3$，

∴ $h_n=(\frac{1}{2})^{n-1}\cdot 3$.

∵ $h_n \parallel h_{n-1}$ ，且都过 F_{n-1} 的碟宽中点，

∴ h_1，h_2，h_3，…，h_{n-1}，h_n 都在同一条直线上，

∵ h_1 在直线 x=2 上，

∴ h_1，h_2，h_3，…，h_{n-1}，h_n 都在直线 x=2 上，

∴ F_n 的碟宽右端点横坐标为 $2+(\frac{1}{2})^{n-1}\cdot 3$.

F_1，F_2，…，F_n 的的碟宽右端点在一条直线上，直线为 y=-x+5．

理由：

考虑 F_{n-2}，F_{n-1}，F_n 情形，关系如图 2，

F_{n-2}，F_{n-1}，F_n 的碟宽分别为 AB，DE，GH；

且 C，F，I 分别为其碟宽的中点，都在直线 x=2 上，

连接右端点，BE，EH．

∵ AB∥ x 轴，DE∥ x 轴，GH∥ x 轴，

∴ AB∥ DE∥ GH，

∴ GH 平行相等于 FE，DE 平行相等于 CB，

∴ 四边形 GFEH、四边形 DCBE 都是平行四边形，

∴ HE∥ GF，EB∥ DC，

$\because \angle GFI=\frac{1}{2}\cdot\angle GFH=\frac{1}{2}\cdot\angle DCE=\angle DCF$，

$\therefore$ GF∥ DC，

$\therefore$ HE∥ EB，

$\because$ HE，EB 都过 E 点，

$\therefore$ HE，EB 在一条直线上，

$\therefore$ F_{n-2}，F_{n-1}，F_n 的碟宽的右端点是在一条直线，

$\therefore$ F_1，F_2，…，F_n 的碟宽的右端点是在一条直线．

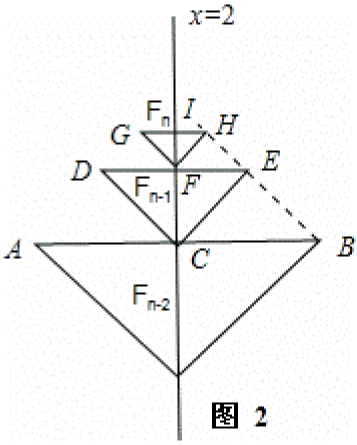


图 2

根据②中得出的碟高和右边端点公式，可知

$y_1=\frac{1}{3}(x-2)^2-3$ 准碟形右端点坐标为（5，0），

$y_2=\frac{2}{3}(x-2)^2$ 准碟形右端点坐标为$\left(2+(\frac{1}{2})^{2-1}\times 3,(\frac{1}{2})^{2-1}\times 3\right)$，即(3.5，1.5)

$\therefore$ 待定系数可得过两点的直线为 $y=-x+5$，

$\therefore$ F_1，F_2，…，F_n的碟宽的右端点是在直线 $y=-x+5$ 上．

【点评】 本题考查学生对新定义和新知识的学习、模仿和应用能力．题目中主要涉及特殊直角三角形，二次函数解析式与图象性质，多点共线证明等知识，综合难度较高，学生对题意要清晰的理解比较困难.

2. 【分析】（1）直接把点 A_1 的坐标代入 $y=ax^2$ 求出 a 的值；

（2）由题意可知：A_1B_1 是点 A_1 的纵坐标：则 $A_1B_1=2\times1^2=2$；A_2B_2 是点 A_2 的纵坐标：则 $A_2B_2=2\times(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$；…则 $A_nB_n=2x^2=2\times[(\frac{1}{2})^{n-1}]^2=(\frac{1}{2})^{2n-3}$；

$B_1B_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$B_2B_3=\frac{1}{2}-(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}=(\frac{1}{2})^2$，…，$B_nB_{n+1}=(\frac{1}{2})^n$；

（3）因为 Rt△$A_kB_kB_{k+1}$ 与 Rt△$A_mB_mB_{m+1}$ 是直角三角形，所以分两种情况讨论：根据（2）的结论代入所得的对应边的比列式，计算求出 k 与 m 的关系，并与 $1\le k<m\le n$（k，m 均为正整数）相结合，得出两种符合条件的值，分别代入两相似直角三角形计算相似比．

【解答】解：（1）∵ 点 A_1（1，2）在抛物线的解析式为 $y=ax^2$ 上，

∴ a=2；

（2）$A_nB_n=2x^2=2\times[(\frac{1}{2})^{n-1}]^2=(\frac{1}{2})^{2n-3}$，

$B_nB_{n+1}=(\frac{1}{2})^n$；

（3）由 Rt△$A_nB_nB_{n+1}$ 是等腰直角三角形得 $A_nB_n=B_nB_{n+1}$，则：$(\frac{1}{2})^{2n-3}=(\frac{1}{2})^n$，

2n﹣3=n，n=3，

∴ 当 n=3 时，Rt△$A_nB_nB_{n+1}$ 是等腰直角三角形，

②依题意得，∠ $A_kB_kB_{k+1}$=∠ $A_mB_mB_{m+1}$=90°，

有两种情况：i）当 Rt△$A_kB_kB_{k+1}$∽ Rt△$A_mB_mB_{m+1}$ 时，

$\frac{A_kB_k}{A_mB_m}=\frac{B_kB_{k+1}}{B_mB_{m+1}}$，$\frac{(\frac{1}{2})^{2k-3}}{(\frac{1}{2})^{2m-3}}=\frac{(\frac{1}{2})^{k}}{(\frac{1}{2})^{m}}$，$(\frac{1}{2})^{2k-2m}=(\frac{1}{2})^{k-m}$，

所以，k=m（舍去），

ii）当 Rt△$A_kB_kB_{k+1}$∽ Rt△$B_{m+1}B_mA_m$ 时，

$\frac{A_kB_k}{B_{m+1}B_m}=\frac{B_kB_{k+1}}{B_mA_m}$，$\frac{(\frac{1}{2})^{2k-3}}{(\frac{1}{2})^{m}}=\frac{(\frac{1}{2})^{k}}{(\frac{1}{2})^{2m-3}}$，$(\frac{1}{2})^{2k-3-m}=(\frac{1}{2})^{k-2m+3}$，

∴ k+m=6，

∵ 1≤k＜m≤n（k，m 均为正整数），

∴ 取$\begin{cases}k=1\\m=5\end{cases}$或$\begin{cases}k=2\\m=4\end{cases}$；

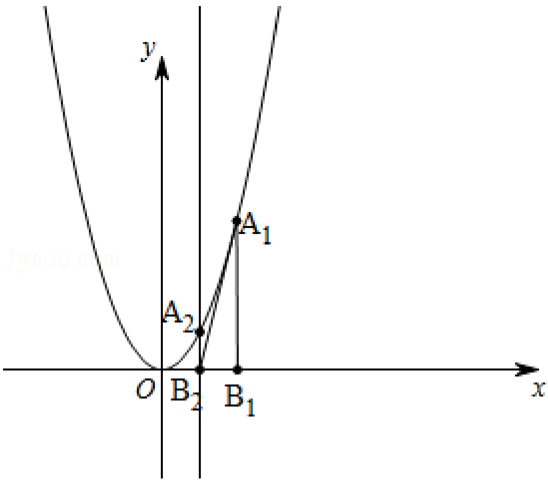
当$\begin{cases}k=1\\m=5\end{cases}$时，Rt△$A_1B_1B_2$∽ Rt△$B_6B_5A_5$，

相似比为：$\frac{A_1B_1}{B_6B_5}=\frac{2}{(\frac{1}{2})^5}=64$，

当$\begin{cases}k=2\\m=4\end{cases}$时，Rt△$A_2B_2B_3$∽ Rt△$B_5B_4A_4$，

相似比为：$\frac{A_2B_2}{B_5B_4}=\frac{\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^4}=8$，

所以：存在 Rt△$A_kB_kB_{k+1}$ 与 Rt△$A_mB_mB_{m+1}$ 相似，其相似比为 64：1 或 8：1．



【点评】本题考查了二次函数的综合问题，这是一个函数类的规律题，把坐标、二次函数和线段有机地结合在一起，以求线段的长为突破口，以相似三角形的对应边的比为等量关系，代入计算解决问题，综合性较强，因为本题小字标较多，容易出错．

3. **求解体验**

(1)把(-1,0)代入 $y=-x^2+bx-3$ 得 $b=-4$

∴ $y=-x^2-4x-3=-(x+2)^2+1$

∴ 顶点坐标是(-2,1)

∵ (-2,1)关于(0,1)的对称点是(2,1)

∴ 成中心对称的抛物线表达式是：

$y=(x-2)^2+1$

即 $y=x^2-4x+5$　　(如右图)

抽象感悟

(2) ∵ $y=-x^2-2x+5$

$=-(x+1)^2+6$

∴ 顶点是(-1,6)

∵ (-1,6)关于$(0,m)$的对称点是$(1,2m-6)$

∴ $y'=(x-1)^2+2m-6$

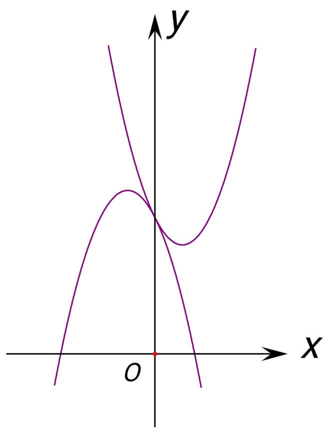
∵ 两抛物线有交点

∴ $-(x+1)^2+6=(x-1)^2+2m-6$有解

∴ $x^2=5-m$ 有解

∴ $5-m\geq 0$

∴ $m\leq 5$　　(如右图)



问题解决

(3) ① ∵ $y=ax^2+2ax-b=a(x+1)^2-a-b$

∴ 顶点(-1，$-a-b$)

代入 $y'=bx^2-2bx+a^2$ 得：

$b+2b+a^2=-a-b$　　①

∵ $y'=bx^2-2bx+a^2=b(x-1)^2+a^2-b$

∴ 顶点(1，a^2-b)

代入 $y=ax^2+2ax-b$ 得：

$a+2a-b=a^2-b$　　②

由① ② 得 $\begin{cases}a^2+a+4b=0\\a^2-3a=0\end{cases}$

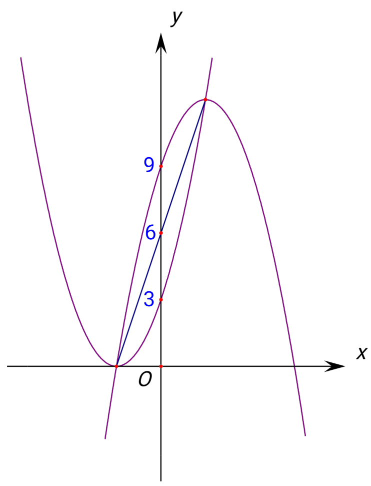
∵ $a\neq 0$，$b\neq 0$

∴ $\begin{cases}a=3\\b=-3\end{cases}$

∴ 两顶点坐标分别是(-1,0),(1,12)

由中点坐标公式得

"衍生中心"的坐标是(0,6)



② 如图，设AA_1，AA_2 … AA_n，AA_{n+1} 与y轴分别相于$\mathbf{B_1}$，$\mathbf{B_2}$ … $\mathbf{B_n}$，$\mathbf{B_{n+1}}$.

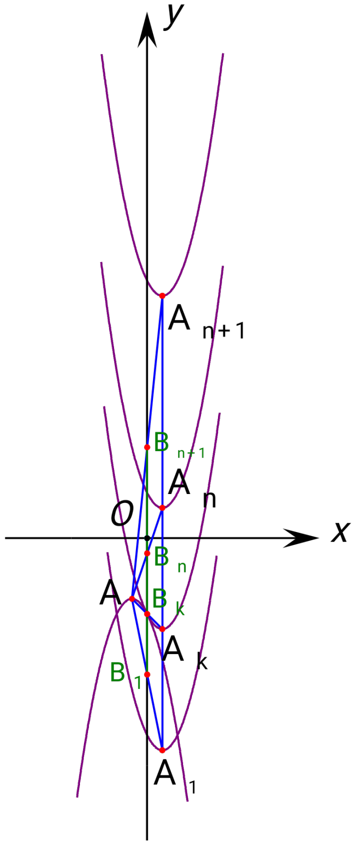
则A 与A_1，A与 A_2,… A与 A_n，A 与A_{n+1} 分别关于$\mathbf{B_1}$，$\mathbf{B_2}$ … $\mathbf{B_n}$，$\mathbf{B_{n+1}}$ 中心对称.

∴ $\mathbf{B_1B_2}$，$\mathbf{B_2B_3}$ … $\mathbf{B_nB_{n+1}}$ 分别是△AA_1A_2，AA_2A_3 …AA_nA_{n+1} 的中位线，

∴ $A_1A_2=2\mathbf{B_1B_2}$，$A_2A_3=2\mathbf{B_2B_3}$ … $A_nA_{n+1}=2\mathbf{B_nB_{n+1}}$

∵ $B_n(0,k+n^2)$，$\mathbf{B_{n+1}}(0,k+(n+1)^2)$

∴ $A_nA_{n+1}=2\mathbf{B_nB_{n+1}}=2[k+(n+1)^2-(k+n^2)]=4n+2$


y
x
O
A n+1
B n+1
A n
B n
A
B k
A k
B 1
A 1