从对数平均谈极值点偏移问题

广东广雅中学 (广州,510160) 赖淑明

《中学数学教学参考》2014年第7期(上旬)刊登的《极值点偏移问题的处理策略》详细归纳了极值点算术偏移问题的处理策略.现在,笔者再和大家一道从极值点偏移问题的本质寻找解决这一类问题的另一种方法.

在文[1]的结尾,作者邢友宝老师谈到"南通市二模第20题为什么两式相减能凑效,而变式相乘却失败?两式相减的思想基础是什么?其他题是否也可以效仿两式相减的思路?如此问题,笔者期待与大家一起探讨交流".本文试图对邢老师的思考进行解惑.

1 极值点偏移问题

已知函数 $y=f(x)$ 是连续函数,$f(x)$ 在区间 (x_1,x_2) 只有一个极值点 x_0,且 $f(x_1)=f(x_2)$,很多极值函数由于极值点左右的"增减速度"不同,函数图象不具对称性,常常有极值点 $x_0\neq\frac{x_1+x_2}{2}$ (或 $f'(x_0)\neq f'(\frac{x_1+x_2}{2})$)的情况.文[1]称这种状态为"极值点偏移".

2 极值点偏移的本质

要证明 $x_0\neq\frac{x_1+x_2}{2}$,实质是证明 $x_0>\frac{x_1+x_2}{2}$ (或 $x_0<\frac{x_1+x_2}{2}$),这是一个关于 x_1,x_2 双变元的不等式.所以,极值点偏移问题实质是双变元不等式的问题.而双变元不等式的问题许多都可以回归对数平均.那么,极值点偏移的问题是不是也就是对数平均的问题呢?

3 对数平均

两个正数 a 和 b 的对数平均定义:

$$L(a,b)=\begin{cases}\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b} & (a\neq b)\\ a & (a=b)\end{cases}$$

对数平均与算术平均、几何平均的大小关系 $\sqrt{ab}\leqslant L(a,b)\leqslant\frac{a+b}{2}$ (证明略,可参考文[2])

4 例谈极值点偏移问题的对数平均转化法

在文[1]中,作者邢老师借助四道例题,经过一系列的同类题的解法对比反思,提炼出极值点偏移问题的解题策略:根据对称性构造一元差函数 $F(x)=f(x_0+x)-f(x_0-x)$;对差函数 $F(x)$ 求导,判断导数符号,确定 $F(x)$ 的单调性;结合 $F(0)=0$,判断 $F(x)$ 的符号;再结合 $f(x)$ 的单调性,比较 x_1 与 $2x_0-x_2$ 的大小,即比较 x_0 与 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 的大小.形成解决这类极值点偏移问题的通法.

邢老师在文末提出的疑惑启发笔者进行思考,对极值点偏移问题本质的追寻,引导笔者进一步探索,这类题是否都可以转化为对数平均问题进行求解呢?沿着这个思考角度,笔者对文[1]的四道例题进行求证,获得了以下的转化过程.

例1 (2014年江苏省南通市二模第20题)设函数 $f(x)=e^x-ax+a\,(a\in R)$,其图象与 x 轴交于 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$ 两点,且 $x_1<x_2$.

(I)求 a 的取值范围;

(II)证明:$f'(\sqrt{x_1x_2})<0$ ($f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数);

(III)略.

解:由(I)知 $x=\ln a$ 是 $y=f(x)$ 的极值点,$a>e^2$ 且 $0<x_1<\ln a<x_2$,$y=f'(x)$ 在 R 上递增.

函数 $f(x)=e^x-ax+a\,(a\in R)$ 的图象与 x 轴交于 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$ 两点 $\Leftrightarrow$ 由 $\begin{cases}e^{x_1}-ax_1+a=0\\ e^{x_2}-ax_2+a=0\end{cases}\Leftrightarrow$ 得 $\begin{cases}\dfrac{e^{x_1}}{x_1-1}=a\\ \dfrac{e^{x_2}}{x_2-1}=a\end{cases}\Leftrightarrow$

$\frac{e^{x_1}}{x_1-1}=\frac{e^{x_2}}{x_2-1}=a$,(显然 $1<x_1<\ln a<x_2$),两边取对数,得

$$x_1-\ln(x_1-1)=x_2-\ln(x_2-1)=\ln a\Leftrightarrow\frac{x_1-x_2}{\ln(x_1-1)-\ln(x_2-1)}=1$$

由对数平均不等式知

$$\frac{x_1-x_2}{\ln(x_1-1)-\ln(x_2-1)}=1>\sqrt{(x_1-1)(x_2-1)}$$

即 $x_1x_2-(x_1+x_2)<0$.

要证 $f'(\sqrt{x_1x_2})<0$ $\Leftrightarrow$ 证 $\sqrt{x_1x_2}<\ln a$ $\Leftrightarrow$ 证 $2\sqrt{x_1x_2}<x_1-\ln(x_1-1)+x_2-\ln(x_2-1)$

$\Leftrightarrow$ 证 $\ln(x_1-1)+\ln(x_2-1)<x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}$

$\Leftrightarrow$ 证 $\ln[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]<x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}$

因为 $\ln[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]<\ln 1=0$,

$x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}=(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2>0$

所以 $\ln[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]<x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}$,故 $\sqrt{x_1x_2}<\ln a$,问题得证.

例2 (2010年高考数学天津卷理科第21题)已知函数 $f(x)=xe^{-x}\,(x\in R)$.

(I)求函数的单调区间及极值;

(II)略

(III)如果 $x_1\neq x_2$,且 $f(x_1)=f(x_2)$,证明 $x_1+x_2>2$.

证明:由(I)知 $f'(x)=e^{-x}(1-x)$,$x=1$ 是 $y=f(x)$ 的极值点,且 $0<x_1<1<x_2$.

已知 $x_1\neq x_2$,且 $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1e^{-x_1}=x_2e^{-x_2}$.

两边取对数,得 $\ln x_1-x_1=\ln x_2-x_2\Leftrightarrow\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=1$,

由对数平均不等式知 $\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=1<\frac{x_1+x_2}{2}$，即 $x_1+x_2>2$，问题得证.

例3（2011年高考数学辽宁卷理数第21题）已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2+(2-a)x$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(II) 略

(III) 若函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴交于 A、B 两点，线段 AB 中点的横坐标为 x_0，证明：$f'(x_0)<0$

证明：(I)(II) 略

(III) 由 (I) 知 $a>0$，$y=f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减，且 $f'(\frac{1}{a})=0$. $x=\frac{1}{a}$ 是 $y=f(x)$ 的极值点.

已知函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴交于 A、B 两点，设 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$，则 $0<x_1<\frac{1}{a}<x_2$

由 $f(x_1)=f(x_2)=0$

$$\Leftrightarrow \ln x_1-ax_1^2+(2-a)x_1=\ln x_2-ax_2^2+(2-a)x_2=0$$

$$\Rightarrow \ln x_1-\ln x_2+2(x_1-x_2)=a(x_1^2-x_2^2+x_1-x_2)$$

$$\Rightarrow a=\frac{\ln x_1-\ln x_2+2(x_1-x_2)}{x_1^2-x_2^2+x_1-x_2}$$

问题要证 $f'(x_0)<0\Leftrightarrow$ 证 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{1}{a}$

$$\Leftrightarrow \text{证}\ \frac{x_1+x_2}{2}>\frac{x_1^2-x_2^2+x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2+2(x_1-x_2)}$$

$$\Leftrightarrow \text{证}\ \frac{x_1+x_2}{2}>\frac{x_1+x_2+1}{\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}+2}$$

$\Leftrightarrow$ 证 $\frac{2}{x_1+x_2}<\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，根据对数平均不等式，显然成立，问题得证.

例4（2013年高考数学湖南卷文科第21题）已知函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x^2}e^x$.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(II) 证明：当 $f(x_1)=f(x_2)\,(x_1\neq x_2)$ 时，$x_1+x_2<0$.

证明：(I) 略 (II) 由 (I) 知 $y=f'(x)$ 在 R 上递减，且 $f'(0)=0$. $x=0$ 是 $y=f(x)$ 的极值点. $y=f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. $x_1<0<x_2$

已知 $f(x_1)=f(x_2)\,(x_1\neq x_2)$ $\Leftrightarrow \frac{1-x_1}{1+x_1^2}e^{x_1}=\frac{1-x_2}{1+x_2^2}e^{x_2}$（显然 $x_1<0<x_2<1$）

$$\Leftrightarrow \ln\frac{1-x_1}{1+x_1^2}+x_1=\ln\frac{1-x_2}{1+x_2^2}+x_2\ \text{（两边取对数）}$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-x_1)-\ln(1+x_1^2)+x_1=\ln(1-x_2)-\ln(1+x_2^2)+x_2$$

$$\Leftrightarrow [\ln(1+x_1^2)-\ln(1+x_2^2)]-[\ln(1-x_1)-\ln(1-x_2)]=x_1-x_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(1+x_1^2)-\ln(1+x_2^2)}{x_1-x_2}-\frac{\ln(1-x_1)-\ln(1-x_2)}{x_1-x_2}=1$$

$$\Leftrightarrow (x_1+x_2)\frac{\ln(1+x_1^2)-\ln(1+x_2^2)}{x_1^2-x_2^2}+\frac{\ln(1-x_1)-\ln(1-x_2)}{(1-x_1)-(1-x_2)}=1\ (*)$$

根据对数平均不等式，有

$$\frac{2}{x_1^2+x_2^2+2}<\frac{\ln(1+x_1^2)-\ln(1+x_2^2)}{x_1^2-x_2^2},$$

$$\frac{2}{2-x_1-x_2}<\frac{\ln(1-x_1)-\ln(1-x_2)}{(1-x_1)-(1-x_2)}$$

故(*)式可化为 $\frac{2(x_1+x_2)}{x_1^2+x_2^2+2}+\frac{2}{2-(x_1+x_2)}<1$，

即 $0>(x_1+x_2)[\frac{2}{x_1^2+x_2^2+2}+\frac{1}{2-(x_1+x_2)}]$，因为 $x_1+x_2<2$，

所以 $\frac{2}{x_1^2+x_2^2+2}+\frac{1}{2-(x_1+x_2)}>0$，所以 $x_1+x_2<0$. 问题得证.

四道例题的成功转化，验证了极值点偏移问题转化为对数平均问题的可行性. 至此，我们发现，极值点偏移的问题本质就是对数平均的问题. 利用对数平均求解，是极值点偏移问题的又一解题策略.

5 转化关键

极值点偏移的问题，多与指数或对数函数有关，转化的关键有如下几步：

第一步 根据 $f(x_1)=f(x_2)$ 建立等式；

第二步 如果等式含有参数，则消参 如果等式中含有指数式，则两边取对数，转化为对数式；

第三步 通过恒等变换转化为对数平均问题，利用对数平均不等式求解.

其实，解决极值点偏移问题的两种方法，实质上都是把两个变元的不等式转化为一元问题求解，途径都是构造函数. 所以解法的本质就是构造函数. 文[1]中邢老师的解法是根据对称性构造函数，而转化为对数平均的解法是捆绑构造函数（证明对数平均不等式的方法）. 两种方法各有优劣，不同的题目使用两种方法的简繁程度不一致，如本文中的例1、例2和例3用转化为对数平均不等式的解法比较顺手，而例4则显复杂. 而有些题，极值点解不出来的，对称性构造函数法就失效，需要转化为对数平均求解. 如供读者小试牛刀的例5.

例5 已知函数 $f(x)=\ln x+x^2$.

设 $F(x)=2f(x)-3x^2-kx$（$k\in R$），若函数 $F(x)$ 存在两个零点 $m,n\,(0<m<n)$，且满足 $2x_0=m+n$，问：函数 $F(x)$ 在 $(x_0,F(x_0))$ 处的切线能否平行于 x 轴？若能，求出该切线方程，若不能，请说明理由.

至此，我们拥有了两种工具解决极值点偏移的问题. 至于极值点偏移问题，何时用根据对称性构造函数法好，何时用转化为对数平均法快，值得我们进一步作深入的研究.

参考文献：

[1]刑友宝. 极值点偏移问题的处理策略. 中学数学教学参考[J]：上旬，2014(7)：19-22.

[2]陈宽宏. 对数平均与高考压轴题. 数学通讯[J]，2012(11)(下半月):34-37.