导数应用之极值点偏移

1. (1) 设不同的两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 均在二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$（$abc\neq 0$）的图像上, 记直线 AB 的斜率为 k, 求证: $k=f'(\frac{x_1+x_2}{2})$;

(2) 设不同的两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 均在“伪二次函数” $g(x)=ax^2+bx+c\ln x$（$abc\neq 0$）的图像上, 记直线 AB 的斜率为 k, 试问: $k=g'(\frac{x_1+x_2}{2})$ 还成立吗?

2. 设函数 $f(x)=ax^2+(1-2a)x-\ln x\ (a\in\mathbf{R})$.

(1) 当 $a>0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 记函数 $y=f(x)$ 的图像为曲线 C, 设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 是曲线 C 上不同的两点, M 为线段 AB 的中点, 过点 M 作 x 轴的垂线交曲线 C 于点 N. 试问: 曲线 C 在点 N 处的切线是否平行于直线 AB?

3. 设函数 $f(x)=x^2-(a-2)x-a\ln x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数有两个零点, 求满足条件的最小正整数 a 的值;

(3) 若方程 $f(x)=c$ 有两个不等实根 x_1,x_2, 求证: $f'(\frac{x_1+x_2}{2})>0$.

4. 设函数 $f(x)=2\ln x+mx-x^2$.

(1) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=2x+n$, 求实数 m,n 的值;

(2) 若 $m>-4$, 求证: 当 $a>b>0$ 时, 有 $\frac{f(a)-f(b)}{a^2-b^2}>-2$;

(3) 若函数 $f(x)$ 有两个零点 $x_1,x_2\ (x_1<x_2)$, 且 x_0 是 x_1,x_2 的等差中项, 求证: $f'(x_0)<0$.

5. 设函数 $f(x)=\ln x-ax$ 有两个零点 x_1, x_2, 求证: $x_1x_2>e^2$.

6. 设函数 $f(x)=e^x-ax+a$ 的两个零点为 x_1, x_2, 求证: $x_1x_2<x_1+x_2$.

7. 设函数 $f(x)=e^x-ax$, 其中 $a>e$,

(1) 求证: 函数 $f(x)$ 有且仅有两个零点 x_1, x_2, 且 $0<x_1<1<x_2$;

(2) 对于 (1) 中的 x_1, x_2, 求证: $f'(x_1)+f'(x_2)>0$.

8. 设函数 $f(x)=e^x+mx$ 的图像在点 $P(0,f(0))$ 处的切线方程为 $2x-y+1=0$, 求证: 对满足 $a<b<c$ 的实数 a,b,c, 都有 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$ 成立.