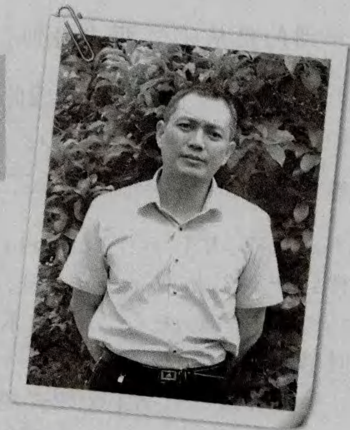
由于极值点左右“增减速度”的不同，使函数图象失去了对称性，出现了极值点的左右偏移。以此为背景的试题常出现在压轴位置。归纳这类问题处理的一般策略，可明确解题方向，克服解题盲目性，提高解题效率。



极值点偏移问题的处理策略

邢友宝（江苏省兴化市安丰高级中学）

若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 时取极值，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的极值点。我们熟悉的二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的极值点为 $x_0=-\frac{b}{2a}$。作直线 $y=h$ 与函数 $y=f(x)$ 交于 $A(x_1,h)$、$B(x_2,h)$ 两点，则 AB 的中点为 $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},h\right)$。对于二次函数，极值点 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，此时认为极值点居中，没有偏离中点。然而很多极值函数，由于极值点左右的“增减速度”不同，函数图象不具有对称性，常常有极值点 $x_0\neq\frac{x_1+x_2}{2}$ 的情况，出现了极值点的左右偏移。以此为背景的极值点偏移问题在历年的高考或模拟考试中屡屡出现。由于 x_0、x_1 或 x_2 往往不易求解，x_0 与 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 的大小不便直接比较，试题难度较大，常处于试卷的压轴题位置，显得尤为重要。本文笔者通过对近年高考或模拟考试中这类问题的探究，提出处理极值点偏移问题的一般策略，以指明这类问题的解题方向，克服解题的盲目性，优化解题过程，提高解题效率。

1 问题呈现

例1 （2014年江苏省南通市二模第20题）设函数 $f(x)=e^x-ax+a(a\in\mathbf{R})$，其图象与 x 轴交于 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$ 两点，且 $x_1<x_2$。

（Ⅰ）求 a 的取值范围；

（Ⅱ）证明：$f'(\sqrt{x_1x_2})<0$（$f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数）；

（Ⅲ）略。

命题组给出的参考答案：

解：（Ⅰ）$f'(x)=e^x-a$。

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 是单调增函数，不符合题意；

当 $a>0$ 时，可求得 a 的范围为 $(e^2,+\infty)$。且 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减；在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增。

（Ⅱ）因为 $\begin{cases} e^{x_1}-ax_1+a=0, & ① \\ e^{x_2}-ax_2+a=0, & ② \end{cases}$

两式相减得 $a=\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}$。 ③

记 $\frac{x_2-x_1}{2}=s(s>0)$，则

$$f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=e^{\frac{x_1+x_2}{2}}-\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1} \quad ④$$

$$=\frac{e^{\frac{x_1+x_2}{2}}}{2s}[2s-(e^s-e^{-s})]。 \quad ⑤$$

设 $g(s)=2s-(e^s-e^{-s})$，则 $g'(s)=2-(e^s+e^{-s})<0$，所以 $g(s)$ 是单调减函数，所以 $g(s)<g(0)=0$。而 $\frac{e^{\frac{x_1+x_2}{2}}}{2s}>0$，所以 $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<0$。

又 $f'(x)=e^x-a$ 是单调增函数，且 $\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$，所以 $f'(\sqrt{x_1x_2})<0$。

考试后笔者询问了部分考生，普遍认为第（Ⅱ）问较难，甚至有些教师也觉得无从下手。因为题目要证 $f'(\sqrt{x_1x_2})<0$，即要证 $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<0$，亦要证 $e^{\frac{x_1+x_2}{2}}-a<0$，也就是要证 $e^{x_1+x_2}<a^2$。这时人们更自

然想到的是从①②两式得到$\begin{cases}e^{x_1}=a(x_1-1),\\ e^{x_2}=a(x_2-1),\end{cases}$从而$e^{x_1+x_2}=a^2(x_1-1)(x_2-1)$,因此改为证明$a^2(x_1-1)\cdot(x_2-1)<a^2$,即$(x_1-1)(x_2-1)<1$。考虑用基本不等式$(x_1-1)(x_2-1)<\left(\frac{x_1+x_2-2}{2}\right)^2$,接着就需证$x_1+x_2<4$。由于$x_1>1$,$x_2>\ln a$,当取$a=e^3$时,将会得到$x_2>3$,从而$x_1+x_2>4$。二元一次不等式$x_1+x_2<4$对任意$a\in(e^2,+\infty)$不恒成立,自然的思路一时陷入了僵局。

参考答案没有把①②两式变形相乘,而是将两式相减得到③式,利用③式将$f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$转化为④式:$e^{\frac{x_1+x_2}{2}}-\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}$,以使参数$a$消去。如此消参并不比上述相乘消参得到$(x_1-1)(x_2-1)<1$自然简洁,这样的处理让人觉得有点像魔术师从帽子里变出兔子,只有新奇,而不知所以然。④式是一个复杂的二元的超越式,要证其小于0,一时也会觉得无从下手。答案接着进行了一个巧妙的变形,将④式变形为⑤式,得到关于$\frac{x_2-x_1}{2}$,即$s(s>0)$的一元表达式。这样的变形颇需一定的洞察力和思维的敏锐性,常常会难倒众生。当然,得到⑤式的一元表达式后,问题就简单了。

要证$f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<0$,自然思路一时受阻,参考答案又显得玄乎,技巧性强。注意到不等式$f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<0$右边的0就是极值点$\ln a$处的导数,即$f'(\ln a)=0$,因此也就是要证$f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<f'(\ln a)$。因为$f'(x)$单调递增,即需证$\frac{x_1+x_2}{2}<\ln a$,这是个极值点右偏的问题。能否有通行的、易于理解的方法呢?让我们到曾经的考题中寻找答案。

2 题海寻踪

例2 (2010年高考数学天津卷理科第21题)已知函数$f(x)=xe^{-x}(x\in\mathbf{R})$。

(Ⅰ)求函数$f(x)$的单调区间和极值;

(Ⅱ)已知函数$y=g(x)$的图象与函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=1$对称,证明:当$x>1$时,$f(x)>g(x)$;

(Ⅲ)如果$x_1\neq x_2$,且$f(x_1)=f(x_2)$,证明:$x_1+x_2>2$。

解:(Ⅰ)$f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递增;在$(1,+\infty)$上单调递减,$f(1)=\frac{1}{e}$为极大值。

(Ⅱ)由题意$g(x)=f(2-x)=(2-x)e^{x-2}$,

令$F(x)=f(x)-g(x)=xe^{-x}-(2-x)e^{x-2}(x\geqslant1)$,$F'(x)=(x-1)(e^{x-2}-e^{-x})$。

因为当$x\geqslant1$时,$x-1\geqslant0$,$e^{x-2}-e^{-x}\geqslant0$,所以$F'(x)\geqslant0$,即$F(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增,所以当$x>1$时,$F(x)>F(1)=0$,即$f(x)>g(x)$。

(Ⅲ)因为$x_1\neq x_2$,不妨设$x_1<x_2$,由(Ⅰ)可知$x_1<1$,$x_2>1$,所以$f(x_1)=f(x_2)>g(x_2)=f(2-x_2)$。因为$x_2>1$,$2-x_2<1$,根据单调性$x_1>2-x_2$,即$x_1+x_2>2$。

点评:第(Ⅲ)问证$x_1+x_2>2$,即要证$\frac{x_1+x_2}{2}>1$。$\frac{x_1+x_2}{2}$就是直线$y=h(h=f(x_1)=f(x_2))$被函数$y=f(x)$所截线段中点的横坐标,不等式右边的1恰是函数$f(x)=xe^{-x}$的极值点,因此本质上是证极值点左偏。

例3 (2011年高考数学辽宁卷理科第21题)已知函数$f(x)=\ln x-ax^2+(2-a)x$。

(Ⅰ)讨论$f(x)$的单调性;

(Ⅱ)设$a>0$,证明:当$0<x<\frac{1}{a}$时,$f\left(\frac{1}{a}+x\right)>f\left(\frac{1}{a}-x\right)$;

(Ⅲ)若函数$y=f(x)$的图象与x轴交于A、B两点,线段AB中点的横坐标为x_0,证明:$f'(x_0)<0$。

解:(Ⅰ)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$。(i)若$a\leqslant0$,则$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;(ii)若$a>0$,则$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减。

(Ⅱ)设函数$F(x)=f\left(\frac{1}{a}+x\right)-f\left(\frac{1}{a}-x\right)$,则

$F(x)=\ln(1+ax)-\ln(1-ax)-2ax$,

$F'(x)=\frac{a}{1+ax}+\frac{a}{1-ax}-2a=\frac{2a^3x^2}{1-a^2x^2}$。

当$0<x<\frac{1}{a}$时,$F'(x)>0$,$F(0)=0$,所以$F(x)>0$。

故当$0<x<\frac{1}{a}$时,$f\left(\frac{1}{a}+x\right)>f\left(\frac{1}{a}-x\right)$。

(Ⅲ)由(Ⅰ)可得,当$a\leqslant0$时,函数$y=f(x)$的图象与x轴至多有一个交点。而函数$y=f(x)$的图象

与 x 轴有两个交点，故 $a>0$。

不妨设 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，$x_2>x_1>0$，则 $x_2>\frac{1}{a}>x_1>0$，$\frac{2}{a}-x_1>\frac{1}{a}>\frac{1}{a}-x_1>0$。

由（Ⅱ）得 $f\left(\frac{2}{a}-x_1\right)=f\left[\frac{1}{a}+\left(\frac{1}{a}-x_1\right)\right]>f(x_1)=0=f(x_2)$。

从而 $x_2>\frac{2}{a}-x_1$，于是 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{1}{a}$。

由（Ⅰ）知，$f'(x_0)<0$。

点评：第（Ⅲ）问证 $f'(x_0)<0$，即要证 $\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{1}{a}$。$\frac{x_1+x_2}{2}$ 是函数 $y=f(x)$ 的图象截 x 轴所得线段中点的横坐标，不等式右边的 $\frac{1}{a}$ 是函数 $f(x)$ 的极值点，因此本质上也是证极值点左偏。

例4 （2013年高考数学湖南卷文科第21题）已知函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x^2}e^x$。

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）证明：当 $f(x_1)=f(x_2)(x_1\neq x_2)$ 时，$x_1+x_2<0$。

解：（Ⅰ）$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减。

（Ⅱ）证明：当 $x<1$ 时，由于 $\frac{1-x}{1+x^2}>0$，$e^x>0$，所以 $f(x)>0$；同理，当 $x>1$ 时，$f(x)<0$。

当 $f(x_1)=f(x_2)(x_1\neq x_2)$ 时，不妨设 $x_1<x_2$，由（Ⅰ）知 $x_1\in(-\infty,0)$，$x_2\in(0,1)$。下面证明：

$\forall x\in(0,1)$，$f(x)<f(-x)$，

即证 $\frac{1-x}{1+x^2}e^x<\frac{1+x}{1+x^2}e^{-x}$。

此不等式等价于 $(1-x)e^x-\frac{1+x}{e^x}<0$。

令 $F(x)=(1-x)e^x-\frac{1+x}{e^x}$，

则 $F'(x)=-xe^{-x}(e^{2x}-1)$。

当 $x\in(0,1)$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 单调递减，从而 $F(x)<F(0)=0$，即 $(1-x)e^x-\frac{1+x}{e^x}<0$。

所以 $\forall x\in(0,1)$，$f(x)<f(-x)$。

而 $x_2\in(0,1)$，所以 $f(x_2)<f(-x_2)$，从而 $f(x_1)<f(-x_2)$。

由于 $x_1,-x_2\in(-\infty,0)$，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，所以 $x_1<-x_2$，即 $x_1+x_2<0$。

点评：第（Ⅲ）问证 $x_1+x_2<0$，即要证 $\frac{x_1+x_2}{2}<0$。$\frac{x_1+x_2}{2}$ 就是直线 $y=h(h=f(x_1)=f(x_2))$ 被函数 $y=f(x)$ 所截线段中点的横坐标，不等式右边的0恰是函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x^2}e^x$ 的极值点，因此本质上是证明极值点右偏。

3 策略提炼

上面三道高考题最后一问所证不等式尽管不同，但本质上都是证明极值点的偏移。由于所给函数都是超越函数，直接由 $f(x)=h$ 求出 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 的值再与极值点比较大小几乎不可能，解答给出的是一种间接证法。

例2先证函数 $y=f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称的函数 $y=g(x)$ 满足：当 $x>1$ 时，$f(x)>g(x)$；例3先证当 $0<x<\frac{1}{a}$ 时，$f\left(\frac{1}{a}+x\right)>f\left(\frac{1}{a}-x\right)$；例4先证 $\forall x\in(0,1)$，$f(x)<f(-x)$。不难发现都是先证关于极值点 x_0 对称的两个函数值 $f(x_0+x)$、$f(x_0-x)$ 的大小关系，解题沿循着如下处理策略：

(1)构造一元差函数 $F(x)=f(x_0+x)-f(x_0-x)$；

(2)对差函数 $F(x)$ 求导，判断导数符号，确定 $F(x)$ 的单调性；

(3)结合 $F(0)=0$，判断 $F(x)$ 的符号，从而确定 $f(x_0+x)$、$f(x_0-x)$ 的大小关系；

(4)由 $f(x_1)=f(x_2)=f[x_0-(x_0-x_2)]>$（或 $<$）$f[x_0+(x_0-x_2)]=f(2x_0-x_2)$ 得到 $f(x_1)>$（或 $<$）$f(2x_0-x_2)$；

(5)结合 $f(x)$ 单调性得到 $x_1>$（或 $<$）$2x_0-x_2$，从而 $\frac{x_1+x_2}{2}>$（或 $<$）x_0。

上述解题策略，直接构造一元的差函数 $F(x)=f(x_0+x)-f(x_0-x)$，接着进行常规的导数应用，不需复杂的变形技巧，思路通行方便。其解题本质是比较 x_1 与 $2x_0-x_2$ 大小关系不方便时，转而通过比较它们的函数值 $f(x_1)$ 与 $f(2x_0-x_2)$ 的大小关系，再结合函数的单调性得到 x_1 与 $2x_0-x_2$ 的大小关系。

从上面三道高考题，我们也看到题目有时为了降低思维难度，通过增加一问要求证明 $f(x_0+x)$、$f(x_0-x)$ 的大小关系，以启发紧接着的极值点偏移的证明（如例2、例3）思路；有时为了增加思维难度，减去启

发性的小题，直接要求证明极值点的偏移（如例 4）；还有时会对极值点的偏移做些包装，如例 3 不是直接要求证明 $\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{1}{a}$，而是进一步要求证明 $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<0$。

4 牛刀小试

有了上面的解题策略，再看本文开头的南通市二模第 20 题第（Ⅱ）问，自然就有了下述解答。

令 $F(x)=f(\ln a+x)-f(\ln a-x)(x\geqslant 0)$，

即 $F(x)=[e^{\ln a+x}-a(\ln a+x)+a]-[e^{\ln a-x}-a(\ln a-x)+a]=a(e^x-e^{-x}-2x)$。

从而 $F'(x)=a(e^x+e^{-x}-2)\geqslant 0$，所以 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增。

因此当 $x>0$ 时，$F(x)>F(0)=0$，即 $f(\ln a+x)>f(\ln a-x)$。

由（Ⅰ）知 $x_1<\ln a<x_2$，所以 $x_2-\ln a>0$，$2\ln a-x_2<\ln a$，

因此 $f(x_1)=f(x_2)=f[\ln a+(x_2-\ln a)]>f[\ln a-(x_2-\ln a)]=f(2\ln a-x_2)$。

由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，所以 $x_1<2\ln a-x_2$，即 $\frac{x_1+x_2}{2}<\ln a$，从而 $\sqrt{x_1x_2}<\ln a$。

又 $f'(x)=e^x-a$ 是单调增函数，所以 $f'(\sqrt{x_1x_2})<f'(\ln a)=0$。

5 大显身手

作为上述解题策略的应用，读者可以尝试去解以下两道题。

练习 1 函数 $f(x)=x\ln x-\frac{k}{x}(k<0)$ 的图象与 x 轴交于不同的两点 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$，求证：$f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\neq 0$。

练习 2 （2014 年成都市石室中学一模第 20 题）已知函数 $f(x)=a\ln x-x^2$。

（Ⅰ）（Ⅱ）略；

（Ⅲ）当 $a=2$ 时，函数 $h(x)=f(x)-mx$ 的图象与 x 轴交于两点 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$，且 $0<x_1<x_2$，又 $h'(x)$ 是 $h(x)$ 的导函数。若正常数 α、β 满足条件 $\alpha+\beta=1$，$\beta\geqslant\alpha$。证明：$h'(\alpha x_1+\beta x_2)<0$。

6 心存疑虑

对于只一个极值点的可导函数，什么情况下出现极值点左偏，什么情况下出现极值点右偏？南通市二模第 20 题为什么两式相减能奏效，而变式相乘却失败？两式相减的思想基础是什么？其他题是否也可以效仿这两式相减的思路？如此问题，笔者期待与大家进一步探讨交流。

（上接第 13 页）

生活中的运用，同时减轻第二课时的负担，但这节课也不适宜一下子把全部公式都推出来，因为学生由正确使用到熟练使用需要较长时间，故留下问题第二课时再回应。

四、小结

（1）对数产生的意义。

（2）指数、对数互化的方法。

（3）如何合理化制定计算规则。

五、作业

4 反思

在设计概念课教学时，教师应该深入思考以下几个问题：

（1）为什么会出现某个概念？找出与此概念相关的本源性问题[3]，再根据学生的认知心理特点重组构造问题情境。

（2）现实中的例子与数学概念之间有什么不同？搞清楚这个问题可以帮助学生理解概念的内涵与外延。

（3）用什么例子来强化概念教学？强化概念的例子应该有两类：一是与实际问题比较的例子，二是严格数学意义上的例子。而且例子的选取应该越简单、越能说明概念的本质（内涵与外延）越好。

教材是知识的载体，但知识不是终极的教育目标，它是思想的载体。教师课堂上的任务就是要透过知识的表象，挖掘出掩藏在知识背后的东西——思想，而不是简单的知识传递。爱因斯坦曾经说过：“什么是教育，当你把受过的教育都忘记了，剩下的就是教育。”这句话很深刻，它告诉我们，当学生走出校门后，可以忘记当年学的某个概念或某个原理，但应该掌握所学知识背后的思想，这样才能真正懂得运用科学的思维方法去思考并解决问题。

参考文献：

[1] M·克莱因.古今数学思想（第一册）[M].上海：上海科学技术出版社，1985.

[2] M·克莱因.古今数学思想（第二册）[M].上海：上海科学技术出版社，1985.

[3] 杨玉东，李传峰.用本源性问题驱动数学概念教学[J].中学教研（数学），2006(1)：1-5.