对极值点偏移问题的再探究

王　晓(江苏省南菁高级中学)

1 问题提出

文献[1]针对函数 $y=f(x)$ 的极值点偏移问题，通过探究与之相关的高考试题，归纳总结出处理此类问题的一般策略，读来受益匪浅，文中提出心存疑虑的几个问题也引起了笔者的思考。无独有偶，笔者所在学校高三数学阶段性检测中，出现了与文献[1]例1颇为相似的问题。

文献[1]中的例1如下：

例1 (2014年江苏省南通市二模第20题)已知函数 $f(x)=e^x-ax+a(a\in\mathbf{R})$，其图像与 x 轴交于 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$ 两点，且 $x_1<x_2$。

(Ⅰ)求实数 a 的取值范围；

(Ⅱ)证明：$f'(\sqrt{x_1x_2})<0$($f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数)；

(Ⅲ)略。

第(Ⅱ)问的解答是这样的：

解：因为 $\begin{cases}e^{x_1}-ax_1+a=0, & ①\\ e^{x_2}-ax_2+a=0, & ②\end{cases}$

①－②得，$a=\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}$。

记 $\dfrac{x_1-x_2}{2}=s(s>0)$，

则 $f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=e^{\frac{x_1+x_2}{2}}-\dfrac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}=\dfrac{e^{\frac{x_1+x_2}{2}}}{2s}[2s-(e^s-e^{-s})]$，…，以下略。

例2 (南菁高级中学高三数学阶段性检测第20题)已知函数 $f(x)=x^2$，$g(x)=a\ln x$(常数 $a>0$)。

(Ⅰ)判断函数 $h(x)=f(x)+g(x)$ 在其定义域上的单调性；

(Ⅱ)若方程 $f(x)-g(x)=ax$ 有唯一解，求 a 的值；

(Ⅲ)若 $a=2$，设函数 $F(x)=g(x)-f(x)-bx(b\in\mathbf{R})$ 的两个零点为 m、$n(0<m<n)$，若 x_0 满足 $2x_0=m+n$，问 $F(x)$ 的图像在点 $(x_0,F(x_0))$ 处的切线能否平行于 x 轴？若能，求出该切线方程，若不能，请说明理由。

解：(Ⅰ)(Ⅱ)略。

(Ⅲ)若 $F(x)$ 在 $(x_0,F(x_0))$ 处的切线平行于 x 轴，其中 $F(x)=2\ln x-x^2-bx$。

结合题意，则有 $\begin{cases}2\ln m-m^2-bm=0, & ①\\ 2\ln n-n^2-bn=0, & ②\\ m+n=2x_0, & ③\\ \dfrac{2}{x_0}-2x_0-b=0, & ④\end{cases}$

①－②得，$2\ln\dfrac{m}{n}-(m+n)(m-n)=b(m-n)$，

由③代入④得 $b=\dfrac{4}{m+n}-(m+n)$，所以

$$\ln\frac{m}{n}=\frac{2(m-n)}{m+n}=\frac{2\left(\frac{m}{n}-1\right)}{\frac{m}{n}+1}。\qquad ⑤$$

设 $u=\dfrac{m}{n}\in(0,1)$，⑤式变为 $\ln u-\dfrac{2(u-1)}{u+1}=0$ $(u\in(0,1))$，…，以下略。

如文献[1]所言，例1的第(Ⅱ)问是要证明极值点右偏，而例2的第(Ⅲ)问的实质就是要判定“极值点”是否“居中”。两道试题采用了同样的处理方法——①、②两式相减后，经过变形加工，构造新函数。在进行试卷分析讲评时，相同的问题困惑着我们：“为什么两式相减能凑效？笔者所在学校有学生将例2中①、②两式相加，最后构造出的函数比给出的答案还要简单，却得出了错误的结论(解题过程略)，这又是为什么？两式相减的思想基础是什么？”

2 问题探究

就在笔者为上述问题百思而不得其解的时候，翻

阅资料偶遇以前教学中的一个问题。

例3 已知函数 $f(x)=e^x-ax$，其中 $a>0$。

（Ⅰ）若对一切 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant 1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（Ⅱ）在函数 $f(x)$ 的图像上取两定点 $A(x_1,f(x_1))$、$B(x_2,f(x_2))$ 且 $x_1<x_2$，记直线 AB 的斜率为 k，求证：存在 $x_0\in(x_1,x_2)$，使 $f'(x_0)=k$ 成立。

解：（Ⅰ）略。

（Ⅱ）由题意知，$k=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}-a$， ①

令 $\varphi(x)=f'(x)-k$，则 $\varphi(x)=e^x-\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}$， ②

于是，$\varphi(x_1)=e^{x_1}-\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}=\dfrac{e^{x_1}}{x_1-x_2}[e^{x_2-x_1}-(x_2-x_1)-1]$，

$\varphi(x_2)=e^{x_2}-\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}=-\dfrac{e^{x_2}}{x_1-x_2}[e^{x_1-x_2}-(x_1-x_2)-1]$。

令 $F(t)=e^t-t-1$，则 $F'(t)=e^t-1$，

当 $t<0$ 时，$F'(t)<0$，$F(t)$ 为单调递减函数；当 $t>0$ 时，$F'(t)>0$，$F(t)$ 为单调递增函数。

故当 $t\neq 0$ 时，$F(t)>F(0)=e^0-0-1=0$，即 $e^t-t-1>0$。从而有 $e^{x_2-x_1}-(x_2-x_1)-1>0$，$e^{x_1-x_2}-(x_1-x_2)-1>0$。

又 $x_1<x_2$，所以 $\dfrac{e^{x_1}}{x_1-x_2}<0$，$-\dfrac{e^{x_2}}{x_1-x_2}>0$，

故而有 $\varphi(x_1)<0$，$\varphi(x_2)>0$。

因为函数 $\varphi(x)$ 的图像是一条连续不间断的曲线，所以存在唯一 $x_0\in(x_1,x_2)$，使 $f'(x_0)=k$ 成立。

本题第（Ⅱ）问的实质是方程有解的问题，通过构造函数转化为函数的零点存在问题来处理是一种常用的策略。比较例1、例3我们不难发现，若将上面例3中的点 $A(x_1,f(x_1))$、$B(x_2,f(x_2))$ 坐标特殊化处理，变为两个特殊的点：$A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$，就是例1的问题情境化了，再比较这两题的解题过程，容易发现只要令例3中①式的 $k=0$，就可得到例1两式相减所得的结果 $a=\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}$，如此一来心中的疑虑也就茅塞顿开了，在上面两例的解题过程中，两式相减这一代数方法之所以能奏效，其思想基础就是数学结合思想——$A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$ 两点所在直线斜率 k 的坐标表示。那么，为什么将两式相乘或相加来处理，最后却会失败呢？

我们知道 $\begin{cases}e^{x_1}-ax_1+a=0,①\\ e^{x_2}-ax_2+a=0,②\end{cases}$ 两式分别表示 $f(x_1)=0$，$f(x_2)=0$，若将两式相减可得到 $f(x_1)-f(x_2)=0$，即 $f(x_1)=f(x_2)$，并没有改变所要研究问题的实质（$k=0$）。而若要将两式相乘，则为 $f(x_1)\cdot f(x_2)=0$，即 $f(x_1)=0$ 或 $f(x_2)=0$，这与题目的情境是不吻合的，将两式相加得出的结果也同样如此，这一点从数形结合角度来解释原因是最清楚不过了，受此启发，我们也可以由例1得到更一般的问题。

变式1 已知函数 $f(x)=e^x-ax$，其中 $a\in\mathbf{R}$，其图像与直线 $y=b$（b 为实常数）交于 A、B 两点，记 A、B 两点的横坐标分别为 x_1、x_2 且 $x_1<x_2$。

（Ⅰ）求实数 a 的取值范围；

（Ⅱ）证明：$f'(\sqrt{x_1x_2})<0$（$f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数）。

3 问题提升

为了便于说明问题，先给出文献[1]提炼的解题策略：

(1)求出函数 $f(x)$ 的极值点 x_0，构造一元阶差函数 $F(x)=f(x_0+x)-f(x_0-x)$；

(2)对差函数 $F(x)$ 求导，判断其导函数的符号，确定 $F(x)$ 的单调性；

(3)结合 $F(0)=0$，判断 $F(x)$ 的符号，从而确定 $f(x_0+x)$、$f(x_0-x)$ 的大小关系；

(4)由 $f(x_1)=f(x_2)=f[x_0-(x_0-x_2)]>(<)f[x_0+(x_0-x_2)]=f(2x_0-x_2)$，得到 $f(x_1)>(<)f(2x_0-x_2)$；

(5)结合 $f(x)$ 的单调性，得到 $x_1>2x_0-x_2$（$x_1<2x_0-x_2$），即 $\dfrac{x_1+x_2}{2}>x_0\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}<x_0\right)$。

上述解题策略，证明了两个结论：

结论1 已知函数 $f(x)$ 的图像与 x 轴有两个交点 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$，且 x_0 为区间 (x_1,x_2) 上唯一的极小值点，若对任意的 $x\in(0,x_0-x_1)\cap(0,x_2-x_0)$，都有 $f(x_0-x)>f(x_0+x)$（$f(x_0-x)<f(x_0+x)$），则函数 $f(x)$ 的极值点左偏（右偏）。

结论2 已知函数 $f(x)$ 的图像与 x 轴有两个交点 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$，且 x_0 为区间 (x_1,x_2) 上唯一的极大值点，若对任意的 $x\in(0,x_0-x_1)\cap(0,x_2-x_0)$，都有 $f(x_0-x)>f(x_0+x)$（$f(x_0-x)<f(x_0+x)$），则函数 $f(x)$ 的极值点右偏（左偏）。

（下转第36页）

将①式代入上式得，$t=\frac{2\sqrt{3}}{3}$。

将 t 值代入④⑤整理，得 $a=\frac{3}{4}c,b=\frac{5\sqrt{3}}{8}c$。

再将上两式代入①式，得 $c=\frac{8}{37}\sqrt{37}$。

则 $a=\frac{6}{37}\sqrt{37},b=\frac{5}{37}\sqrt{111}$。

众所周知，高考“拉分题”、自主招生题、数学竞赛题都往往集知识、方法、能力于一身，凸显数学思想方法的应用。有一个共同目标，那就是考查学生对基本知识和基本技能的掌握情况，以及综合、灵活运用知识的能力。该竞赛题取材于学生和教师接触过的两题的精华——构造法和方程思想，让人觉得既爱又恨，既熟悉又陌生，熟悉的是题目的外表，陌生的是解题的思想方法，强强联合，在有限的时间内对考生提出更高的要求。

作为一线教师，笔者非常希望这类优秀竞赛题的出现，知识不超纲，完全符合新课标的要求，能力属于“跳一跳能摘到”，符合竞赛选拔功能。当下在自主招生、各类竞赛试题中，出现大量超纲甚至高等数学知识下放的题目，美其名曰考查学生后续学习潜能，笔者不敢苟同。因为竞赛初衷是选拔对数学有浓厚兴趣、有非凡天赋的学生，但现实中又有几名学生课外会自学超纲的知识和高等数学？最终辛苦的是带有功利思想的教师和学生，“兴趣”成了冠冕堂皇的托辞。

另外，竞赛题也不是很神秘的事物，随着时代的进步，很多早年的经典国际奥赛题粉墨登场，出现在教材上、高考试卷中、省级竞赛题中。它只不过是常规知识的巧妙“拼盘”，作为食客，能看出食材，就能知其味道从何而来，若能悟出拼盘技巧，即便外观上看不出什么，也能猜出取之何种食物。对知识的掌握若能如此，解题也就达到一定境界了。

参考文献：

[1] 罗增儒.数学解题学引论[M].西安：陕西师范大学出版社，2008.

（上接第33页）

需要说明的是，上面两个结论，借助函数图像从数形结合的角度来理解较为直观，条件中的 $x\in(0,x_0-x_1)\cap(0,x_2-x_0)$；在极值点左偏时，就等价于 $x\in(0,x_0-x_1)$；当极值点右偏时，则等价于 $x\in(0,x_2-x_0)$（读者可查看文献[1]中例3第(Ⅱ)问的题设以及例4第(Ⅱ)问的解答）。

能否用此结论来解决一般性的问题呢？让我们来看下面两个变式题：

变式2 已知函数 $f(x)=e^x$，直线 $y=ax$ 与函数 $f(x)$ 的图像交于 $A(x_1,f(x_1))$、$B(x_2,f(x_2))$ $(x_1<x_2)$ 两点，记 AB 中点的横坐标为 t，试比较 $f'(t)$ 与实数 a 的大小。

变式3 已知函数 $f(x)=e^x-ax$，其中 $a\in\mathbf{R}$，斜率为 k 的直线与函数 $f(x)$ 的图像交于 $A(x_1,f(x_1))$、$B(x_2,f(x_2))$ $(x_1<x_2)$ 两点，记 AB 中点的横坐标为 t，试比较 $f'(t)$ 与实数 k 的大小。

变式2经过转化后就是例1，解题过程可参考变式3，变式3的解答如下：

令 $\varphi(x)=f'(x)-k$，由例3的解答得 $\varphi(x)=e^x-\frac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}$，

因为 $\varphi(x)$ 为单调递增函数，且例3已证得存在唯一的 $x_0\in(x_1,x_2)$，使 $f'(x_0)=k$，即 $\varphi(x)=0$ 成立，

所以设斜率为 k 的直线方程为 $y=kx+b$，

令 $F(x)=f(x)-(kx+b)=e^x-ax-kx-b$，

则 $F(x)$ 在区间 (x_1,x_2) 上有唯一极小值点 x_0。

再设 $H(x)=F(x_0-x)-F(x_0+x)$，其中 $x\in(0,x_0-x_1)\cap(0,x_2-x_0)$，

则 $H(x)=e^{x_0-x}-e^{x_0+x}+2(a+k)x$。

由 $f'(x_0)=k$ 得 $e^{x_0}-a=k$，即 $a+k=e^{x_0}$，

所以 $H'(x)=-e^{x_0-x}-e^{x_0+x}+2e^{x_0}=-e^{x_0}(e^x+e^{-x}-2)<0$，$H(x)$ 为单调递减函数。

从而 $H(x)<H(0)=0$，即 $F(x_0-x)<F(x_0+x)$，

由结论1可知，函数 $H(x)$ 极值点右偏，故 $f'(t)<k$。

类似地，由本文的例2也可得到如下变式题，有兴趣的读者可以尝试去解决。

变式4 已知函数 $f(x)=2\ln x-x^2$，过原点且斜率为 k 的直线 l 与函数 $f(x)$ 的图像交于 $A(m,f(m))$、$B(n,f(n))$ $(0<m<n)$ 两点，若 x_0 满足 $2x_0=m+n$。问 $f(x)$ 的图像在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线能否与直线 l 平行？若能，求出该切线方程，若不能，试判断 $f'(x_0)$ 与实数 k 的大小。

参考文献：

[1] 邢友宝.极值点偏移问题的处理策略[J].中学数学教学参考：上旬，2014(7):19-22.