以二次函数为基架的压轴题解题通法研究及典型题剖析

二次函数在全国中考数学中常常作为压轴题，同时在省级，国家级数学竞赛中也有二次函数大题，在成都，绵阳等地的中考和外地招生考试中都有二次函数大题，很多学生在有限的时间内都不能很好完成。由于在高中和大学中很多数学知识都与函数知识或函数的思想有关，学生在初中阶段函数知识和函数思维方法学得好否，直接关系到未来数学的学习。所以二次函数综合题自然就成了相关出题老师和专家的必选内容。我通过近 6 年的研究，思考和演算了上 1000 道二次函数大题，总结出了解决二次函数压轴题的通法，供大家参考。

一、常见的类型及破题策略

1.求证“两线段相等”的问题：

2.“平行于 y 轴的动线段长度的最大值”的问题：

由于平行于 y 轴的线段上各个点的横坐标相等（常设为 t），借助于两个端点所在的函数图象解析式，把两个端点的纵坐标分别用含有字母 t 的代数式表示出来，再由两个端点的高低情况，运用平行于 y 轴的线段长度计算公式 $y_{上}-y_{下}$，把动线段的长度就表示成为一个自变量为 t，且开口向下的二次函数解析式，利用二次函数的性质，即可求得动线段长度的最大值及端点坐标。

3. 求一个已知点关于一条已知直线的对称点的坐标问题：

先用点斜式（或称 K 点法）求出过已知点，且与已知直线垂直的直线解析式，再求出两直线的交点坐标，最后用中点坐标公式即可。

4.“抛物线上是否存在一点，使之到定直线的距离最大”的问题：

（方法 1）先求出定直线的斜率，由此可设出与定直线平行且与抛物线相切的直线的解析式（注意该直线与定直线的斜率相等，因为平行直线斜率（k）相等），再由该直线与抛物线的解析式组成方程组，用代入法把字母 y 消掉，得到一个关于 x 的的一元二次方程，由题有△=b^2 -4ac=0（因为该直线与抛物线相切，只有一个交点，所以b^2 -4ac=0）从而就可求出该切线的解析式，再把该切线解析式与抛物线的解析式组成方程组，求出 x、y 的值，即为切点坐标，然后再利用点到直线的距离公式，计算该切点到定直线的距离，即为最大距离。

（方法 2）该问题等价于相应动三角形的面积最大问题，从而可先求出该三角形取得最大面积时，动点的坐标，再用点到直线的距离公式，求出其最大距离。

（方法 3）先把抛物线的方程对自变量求导，运用导数的几何意义，当该导数等于定直线的斜率时，求出的点的坐标即为符合题意的点，其最大距离运用点到直线的距离公式可以轻松求出。

5. 常数问题：

（1）点到直线的距离中的常数问题：

“抛物线上是否存在一点，使之到定直线的距离等于一个固定常数”的问题：

先借助于抛物线的解析式，把动点坐标用一个字母表示出来，再利用点到直线的距离公式建立一个方程，解此方程，即可求出动点的横坐标，进而利用抛物线解析式，求出动点的纵坐标，从而抛物线上的动点坐标就求出来了。

（2）三角形面积中的常数问题：

“抛物线上是否存在一点，使之与定线段构成的动三角形的面积等于一个定常数”的问题：

先求出定线段的长度，再表示出动点（其坐标需用一个字母表示）到定直线的距离，再运用三角形的面积

公式建立方程，解此方程，即可求出动点的横坐标，再利用抛物线的解析式，可求出动点纵坐标，从而抛物线上的动点坐标就求出来了。

6.“在定直线（常为抛物线的对称轴，或 x 轴或 y 轴或其它的定直线）上是否存在一点，使之到两定点的距离之和最小”的问题：

先求出两个定点中的任一个定点关于定直线的对称点的坐标，再把该对称点和另一个定点连结得到一条线段，该线段的长度〈应用两点间的距离公式计算〉即为符合题中要求的最小距离，而该线段与定直线的交点就是符合距离之和最小的点，其坐标很易求出（利用求交点坐标的方法）。

7.三角形周长的“最值(最大值或最小值)”问题：

“在定直线上是否存在一点，使之和两个定点构成的三角形周长最小”的问题（简称“一边固定两边动的问题)：

由于有两个定点，所以该三角形有一定边（其长度可利用两点间距离公式计算），只需另两边的和最小即可。

8.三角形面积的最大值问题：

① **“抛物线上是否存在一点，使之和一条定线段构成的三角形面积最大”的问题（简称“一边固定两边动的问题”)：**

(方法 1)先利用两点间的距离公式求出定线段的长度；然后再利用上面 3 的方法，求出抛物线上的动点到该定直线的最大距离。最后利用三角形的面积公式 $\frac{1}{2}$ 底·高。即可求出该三角形面积的最大值，同时在求解过程中，切点即为符合题意要求的点。

（方法 2）过动点向 y 轴作平行线找到与定线段（或所在直线）的交点，从而把动三角形分割成两个基本模型的三角形，动点坐标一母示后，进一步可得到 $S_{动三角形}=\frac{1}{2}(y_{上（动）}-y_{下（动）})\times(x_{右（定）}-x_{左（定）})$，转化为一个开口向下的二次函数问题来求出最大值。

② “三边均动的动三角形面积最大”的问题（简称“三边均动”的问题）：

先把动三角形分割成两个基本模型的三角形（有一边在 x 轴或 y 轴上的三角形，或者有一边平行于 x 轴或 y 轴的三角形，称为基本模型的三角形）面积之差，设出动点在 x 轴或 y 轴上的点的坐标，而此类题型，题中一定含有一组平行线，从而可以得出分割后的一个三角形与图中另一个三角形相似（常为图中最大的那一个三角形)。利用相似三角形的性质（对应边的比等于对应高的比）可表示出分割后的一个三角形的高。从而可以表示出动三角形的面积的一个开口向下的二次函数关系式，相应问题也就轻松解决了。

9. “一抛物线上是否存在一点，使之和另外三个定点构成的四边形面积最大的问题”：

由于该四边形有三个定点，从而可把动四边形分割成一个动三角形与一个定三角形（连结两个定点，即可得到一个定三角形）的面积之和，所以只需动三角形的面积最大，就会使动四边形的面积最大，而动三角形面积最大值的求法及抛物线上动点坐标求法与 7 相同。

10、“定四边形面积的求解”问题：

有两种常见解决的方案：

方案（一)：连接一条对角线，分成两个三角形面积之和；

方案（二)：过不在 x 轴或 y 轴上的四边形的一个顶点，向 x 轴（或 y 轴）作垂线，或者把该点与原点连结起来，分割成一个梯形（常为直角梯形）和一些三角形的面积之和（或差），或几个基本模型的三角形面积的和（差）

11．“两个三角形相似”的问题：

12．“某函数图象上是否存在一点，使之与另两个定点构成等腰三角形”的问题：

首先弄清题中是否规定了哪个点为等腰三角形的顶点。（若某边底，则只有一种情况；若某边为腰，有两种情况；若只说该三点构成等腰三角形，则有三种情况）。先借助于动点所在图象的解析式，表示出动点的坐标（一母示），按分类的情况，分别利用相应类别下两腰相等，使用两点间的距离公式，建立方程。解出此方程，即可求出动点的横坐标，再借助动点所在图象的函数关系式，可求出动点纵坐标，注意去掉不合题意的点（就是不能构成三角形这个题意）。

13、“某图象上是否存在一点，使之与另外三个点构成平行四边形”问题：

这类问题，在题中的四个点中，至少有两个定点，用动点坐标“一母示”分别设出余下所有动点的坐标（若有两个动点，显然每个动点应各选用一个参数字母来“一母示”出动点坐标），任选一个已知点作为对角线的起点，列出所有可能的对角线（显然最多有 3 条），此时与之对应的另一条对角线也就确定了，然后运用中点坐标公式，求出每一种情况两条对角线的中点坐标，由平行四边形的判定定理可知，两中点重合，其坐标对应相等，列出两个方程，求解即可。

进一步有：

① 若是否存在这样的动点构成矩形呢？先让动点构成平行四边形，再验证两条对角线相等否？若相等，则所求动点能构成矩形，否则这样的动点不存在。

② 若是否存在这样的动点构成棱形呢？先让动点构成平行四边形，再验证任意一组邻边相等否？若相等，则所求动点能构成棱形，否则这样的动点不存在。

③ 若是否存在这样的动点构成正方形呢？先让动点构成平行四边形，再验证任意一组邻边是否相等？和两条对角线是否相等？若都相等，则所求动点能构成正方形，否则这样的动点不存在。

14．“抛物线上是否存在一点，使两个图形的面积之间存在和差倍分关系”的问题：（此为“单动问题”〈即定解析式和动图形相结合的问题〉，后面的 19 实为本类型的特殊情形。）

先用动点坐标“一母示”的方法设出直接动点坐标，分别表示（如果图形是动图形就只能表示出其面积）或计算（如果图形是定图形就计算出它的具体面积），然后由题意建立两个图形面积关系的一个方程，解之即可。（注意去掉不合题意的点），如果问题中求的是间接动点坐标，那么在求出直接动点坐标后，再往下继续求解即可。

15．“某图形〈直线或抛物线〉上是否存在一点，使之与另两定点构成直角三角形”的问题：

若夹直角的两边与 y 轴都不平行：先设出动点坐标（一母示），视题目分类的情况，分别用斜率公式算出夹直角的两边的斜率，再运用两直线（没有与 y 轴平行的直线）垂直的斜率结论（两直线的斜率相乘等于-1），得到一个方程，解之即可。

若夹直角的两边中有一边与 y 轴平行，此时不能使用斜率公式。补救措施是：过余下的那一个点（没在平行于 y 轴的那条直线上的点）直接向平行于 y 的直线作垂线或过直角点作平行于 y 轴的直线的垂线与另一相关图象相交，则相关点的坐标可轻松搞定。

16．“某图象上是否存在一点，使之与另两定点构成等腰直角三角形”的问题。

① 若定点为直角顶点，先用 k 点法求出另一直角边所在直线的解析式（如斜率不存在，根据定直角点，可以直接写出另一直角边所在直线的方程），利用该解析

式与所求点所在的图象的解析式组成方程组，求出交点坐标，再用两点间的距离公式计算出两条直角边等否？若等，该交点合题，反之不合题，舍去。

② 若动点为直角顶点：先利用 k 点法求出定线段的中垂线的解析式，再把该解析式与所求点所在图象的解析式组成方程组，求出交点坐标，再分别计算出该点与两定点所在的两条直线的斜率，把这两个斜率相乘，看其结果是否为-1？若为-1，则就说明所求交点合题；反之，舍去。

17.“题中含有两角相等，求相关点的坐标或线段长度”等的问题：

题中含有两角相等，则意味着应该运用三角形相似来解决，此时寻找三角形相似中的基本模型“A”或“X”是关键和突破口。

二、常用公式或结论———破解函数难题的基石

1. 横线段的长＝横标之差的绝对值 ＝ $x_{大}-x_{小}=x_{右}-x_{左}$

纵线段的长＝纵标之差的绝对值 $=y_{大}-y_{小}=y_{上}-y_{下}$

（2）**点轴距离：**

点 P（x_0 ，y_0）到 X 轴的距离为$|y_0|$，到 Y 轴的距离为$|x_o|$。

（3）**两点间的距离公式：**

若 A（x_1,y_1）,B(x_2,y_2), 则 AB=$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

（4）**点到直线的距离：**

点 P（x_0,y_0）到直线 Ax+By+C=0 (其中常数 A,B,C 最好化为整系数，也方便计算)的距离为：

$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 或 $d=\dfrac{|kx_0-y_0+b|}{\sqrt{1^2+k^2}}$

$(y=kx+b\text{即}kx-y+b=0)$

（5）**中点坐标公式：**

若 A(x_1,y_1)，B（x_2,y_2），则线段 AB 的中点坐标为（$\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$\dfrac{y_1+y_2}{2}$）

（6）**直线的斜率公式：**

若 A（x_1,y_1），B（x_2,y_2）$\langle x_1\neq x_2\rangle$，则直线 AB 的斜率为：

$k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，

$\langle x_1\neq x_2\rangle$,(注：当$x_1=x_2$时，直线AB与y轴平行，斜率不存在)

（7）**两直线平行的结论：**

已知直线$l_1:y=k_1x+b_1,l_2:y=k_2x+b_2;$

① 若$l_1 // l_2\Rightarrow k_1=k_2$

② 若$k_1=k_2$,且$b_1\neq b_2\Rightarrow l_1 // l_2$

（8）**两直线垂直的结论：**

已知直线$l_1:y=k_1x+b_1,l_2:y=k_2x+b_2;$

①若$l_1\perp l_2\Rightarrow k_1.k_2=-1;$

②若$k_1.k_2=-1\Rightarrow l_1\perp l_2.$

（9）**由特殊数据得到或猜想的结论：**

① 已知点的坐标或线段的长度中若含有$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$等敏感数字信息，那很可能有特殊角出现。

② 在抛物线的解析式求出后，要高度关注交点三角形和顶点三角形的形状，若有特殊角出现，那很多问题就好解决。

③ 还要高度关注已知或求出的直线解析式中的斜率 k 的值，

若 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，则直线与 X 轴的夹角为 30°；

若 $k=\pm 1$；则直线与 X 轴的夹角为 45°；

若 $k=\pm\sqrt{3}$，则直线与 X 轴的夹角为 60°。

这对计算线段长度或或点的坐标或三角形相似等问题创造条件。

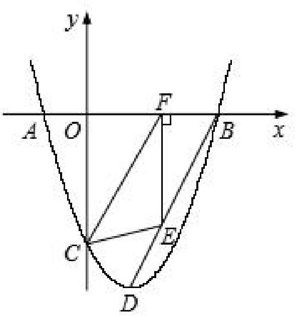
三 、中考二次函数压轴题分析

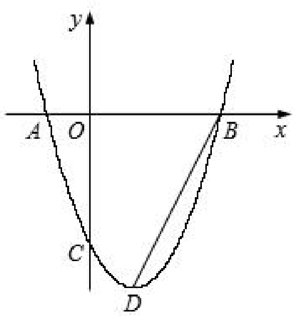
例 1　如图，抛物线 $y=x^2+bx+c$（$c<0$）与 x 轴交于 A、B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C，顶点为 D，且 $OB=OC=3$．点 E 为线段 BD 上的一个动点，$EF\perp x$ 轴于 F.

（1）求抛物线的解析式；

（2）当 $\angle CEF=\angle ABD$ 时，求点 E 的坐标；

（3）是否存在点 E，使 $\triangle ECF$ 为直角三角形？若存在，求点 E 的坐标；若不存在，请说明理由.





备用图

解：（1）∵$OB=OC=3$，$c<0$，∴B（3，0），C（0，−3）

∴$y=x^2+bx-3$，把 B（3，0）代入得：

$0=9+3b-3$，∴$b=-2$

∴抛物线的解析式为 $y=x^2-2x-3$

（2）作 $DG\perp x$ 轴于 G，$CH\perp EF$ 于 H

∵$y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，∴D（1，−4）

∴$DG=4$，$BG=3-1=2$

设直线 BD 的解析式为 $y=kx+n$

∴$\begin{cases}3k+n=0\\k+n=-4\end{cases}$　　解得 $\begin{cases}k=2\\n=-6\end{cases}$

∴直线 BD 的解析式为 $y=2x-6$

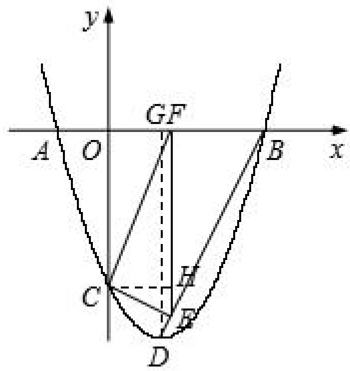
设 E（m，$2m-6$）

∵$EF\perp x$ 轴，∴$CH=m$，$EH=-(2m-6)-3$

∵$\angle CEF=\angle ABD$，∴$\tan\angle CEF=\tan\angle ABD$

∴$\frac{CH}{EH}=\frac{DG}{BG}=\frac{4}{2}=2$，∴$\frac{m}{-(2m-6)-3}=2$

解得 $m=\frac{6}{5}$，∴E（$\frac{6}{5}$，$-\frac{18}{5}$）



（3）①若 $\angle CEF=90^\circ$，则 $CE\parallel x$ 轴

∴点 E 的纵坐标为 −3，代入 $y=2x-6$

$-3=2x-6$，∴$x=\frac{3}{2}$

∴E_1（$\frac{3}{2}$，−3）

②若 $\angle ECF=90^\circ$，作 $CH\perp EF$ 于 H

则 $\triangle CHE\backsim\triangle FCH$，∴$\frac{CH}{EH}=\frac{FH}{CH}$

∴$\frac{m}{-(2m-6)-3}=\frac{3}{m}$，解得 $m=-3\pm3\sqrt{2}$

∵$1\leqslant m<3$，∴$m=3\sqrt{2}-3$

∴E_2（$3\sqrt{2}-3$，$6\sqrt{2}-12$）

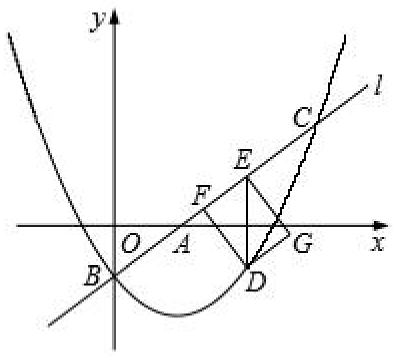
综上所述，E 点坐标为 E_1（$\frac{3}{2}$，−3），E_2（$3\sqrt{2}-3$，$6\sqrt{2}-12$）

例 2　如图，直线 l：$y=\frac{3}{4}x+m$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A 和点 B（0，−1），抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 经过点 B，与直线 l 的另一个交点为 $C(4, n)$．

（Ⅰ）求 n 的值和抛物线的解析式；

（Ⅱ）点 D 在抛物线上，$DE\parallel y$ 轴交直线 l 于点 E，点 F 在直线 l 上，且四边形 $DFEG$ 为矩形．设点 D 的横坐标为 t（$0<t<4$），矩形 $DFEG$ 的周长为 p，求 p 与 t 的函数关系式以及 p 的最大值

（Ⅲ）将△AOB 绕平面内某点 M 逆时针旋转 90°得到△$A_1O_1B_1$（点 A_1、O_1、B_1 分别与点 A、O、B 对应），若△$A_1O_1B_1$ 的两个顶点恰好落在抛物线上，请直接写出点 A_1 的坐标．



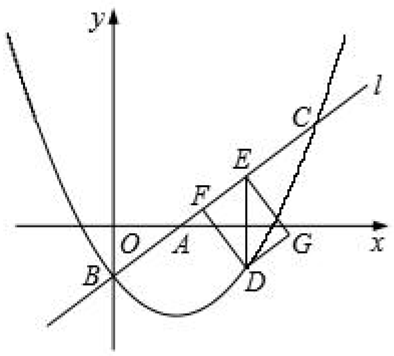
解：（Ⅰ）∵直线 l：$y=\frac{3}{4}x+m$ 经过点 B（0，−1），∴$m=-1$

∴直线 l 的解析式为 $y=\frac{3}{4}x-1$

∵直线 l：$y=\frac{3}{4}x-1$ 经过点 C（4，n）　∴$n=\frac{3}{4}\times4-1=2$

∵抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 经过点 B（0，−1）和点 C（4，2）

∴$\begin{cases}c=-1\\ \frac{1}{2}\times4^2+4b+c=2\end{cases}$　解得 $\begin{cases}b=-\frac{5}{4}\\ c=-1\end{cases}$　∴抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x-1$



（Ⅱ）∵直线 l：$y=\frac{3}{4}x-1$ 与 x 轴交于点 A

∴A（$\frac{4}{3}$，0），∴$OA=\frac{4}{3}$

∵B（0，−1），∴$OB=1$，$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\frac{5}{3}$

∵$DE\parallel y$ 轴，∴$\angle OBA=\angle FED$

又 $\angle DFE=\angle AOB=90°$，∴$\triangle OAB\backsim\triangle FDE$

∴$\frac{OA}{FD}=\frac{OB}{FE}=\frac{AB}{DE}$，∴$\frac{\frac{4}{3}}{FD}=\frac{1}{FE}=\frac{\frac{5}{3}}{DE}$　∴$FD=\frac{4}{5}DE$，$FE=\frac{3}{5}DE$

∴$p=2(FD+FE)=2(\frac{4}{5}DE+\frac{3}{5}DE)=\frac{14}{5}DE$

∵点 D 在抛物线上，点 D 的横坐标为 t，∴D（t，$\frac{1}{2}t^2-\frac{5}{4}t-1$）

∴E（t，$\frac{3}{4}t-1$），且 $0<t<4$

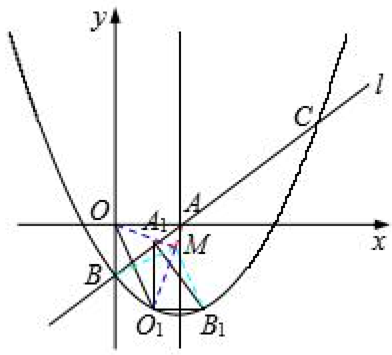
∴$DE=\frac{3}{4}t-1-(\frac{1}{2}t^2-\frac{5}{4}t-1)=-\frac{1}{2}t^2+2t$

∴$p=\frac{14}{5}(-\frac{1}{2}t^2+2t)=-\frac{7}{5}t^2+\frac{28}{5}t$（$0<t<4$）

∵$p=-\frac{7}{5}t^2+\frac{28}{5}t=-\frac{7}{5}(t-2)^2+\frac{28}{5}$

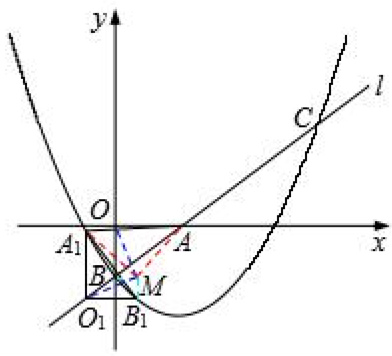
∴当 $t=2$ 时，p 有最大值 $\frac{28}{5}$

（Ⅲ）A_1（$\frac{3}{4}$，$-\frac{31}{96}$）或 A_1（$-\frac{7}{12}$，$-\frac{29}{288}$）



提示：∵△AOB 绕平面内某点 M 逆时针旋转 90°得到△$A_1O_1B_1$（点 A_1、O_1、B_1 分别与点 A、O、B 对应）且△$A_1O_1B_1$ 的两个顶点恰好落在抛物线上

∴顶点 O_1、B_1 落在抛物线上或顶点 A_1、B_1 落在抛物线上



①当 O_1、B_1 落在抛物线上时，则 A_1O_1∥y 轴，O_1B_1∥x 轴

∴O_1、B_1 关于抛物线的对称轴对称

∵$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x-1=\frac{1}{2}(x-\frac{5}{4})^2-\frac{57}{32}$

∴抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{5}{4}$

∵$O_1B_1=OB=1$，

∴点 O_1 的横坐标为：$\frac{5}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

当 $x=\frac{3}{4}$ 时，$y=\frac{1}{2}\times(\frac{3}{4})^2-\frac{5}{4}\times\frac{3}{4}-1=-\frac{53}{32}$

∴O_1（$\frac{3}{4}$，$-\frac{53}{32}$）

∵$A_1O_1=AO=\frac{4}{3}$，∴点 A_1 的纵坐标为：$\frac{4}{3}-\frac{53}{32}=-\frac{31}{96}$　∴A_1（$\frac{3}{4}$，$-\frac{31}{96}$）

②当 A_1、B_1 落在抛物线上时

设 A_1（a，$\frac{1}{2}a^2-\frac{5}{4}a-1$），则 B_1（$a+1$，$\frac{1}{2}a^2-\frac{5}{4}a-1-\frac{4}{3}$）

∵点 B_1 在抛物线上，∴$\frac{1}{2}a^2-\frac{5}{4}a-1-\frac{4}{3}=\frac{1}{2}(a+1)^2-\frac{5}{4}(a+1)-1$　　解得 $a=-\frac{7}{12}$

∴A_1（$-\frac{7}{12}$，$-\frac{29}{288}$）