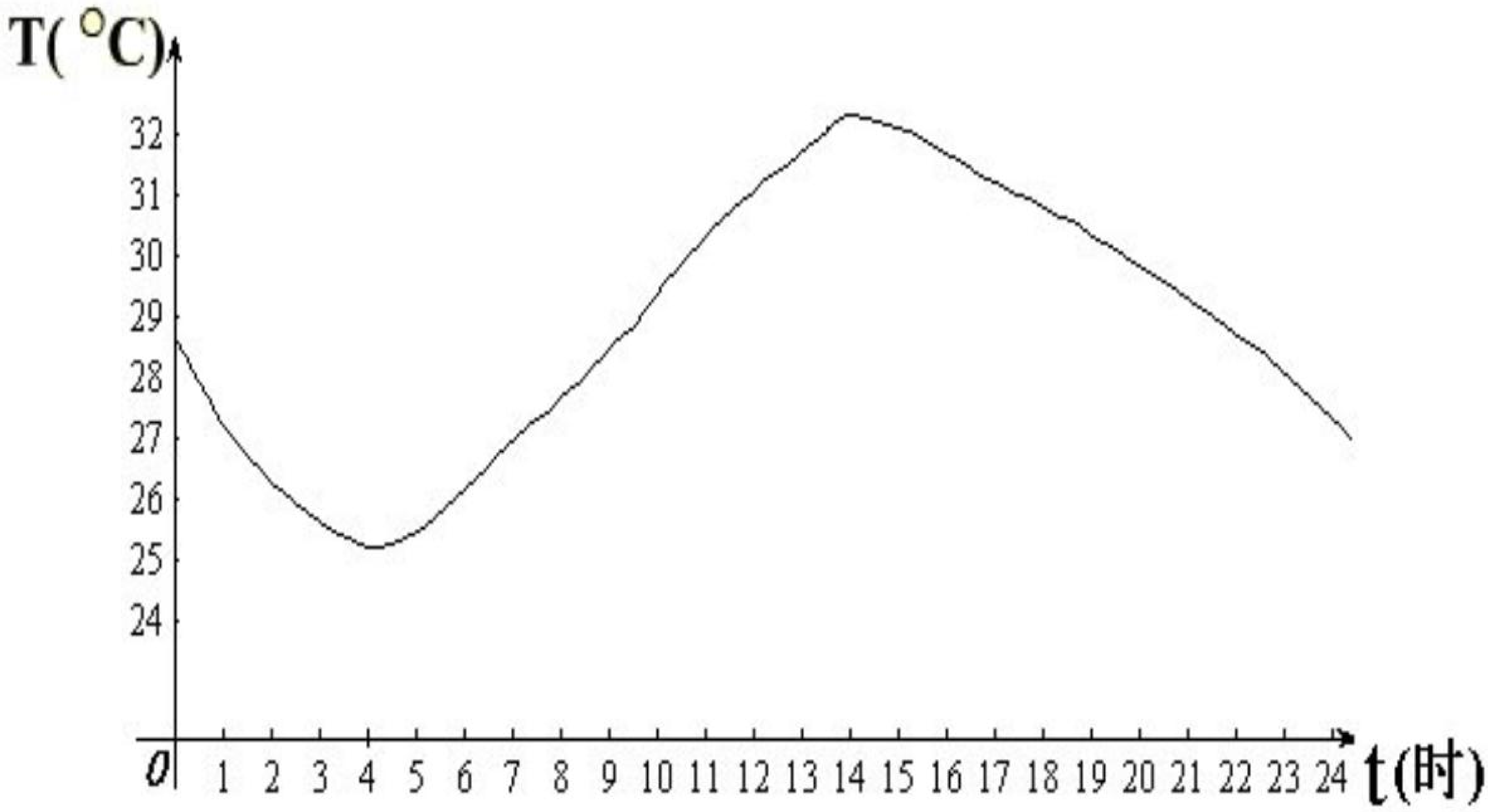
函数的单调性

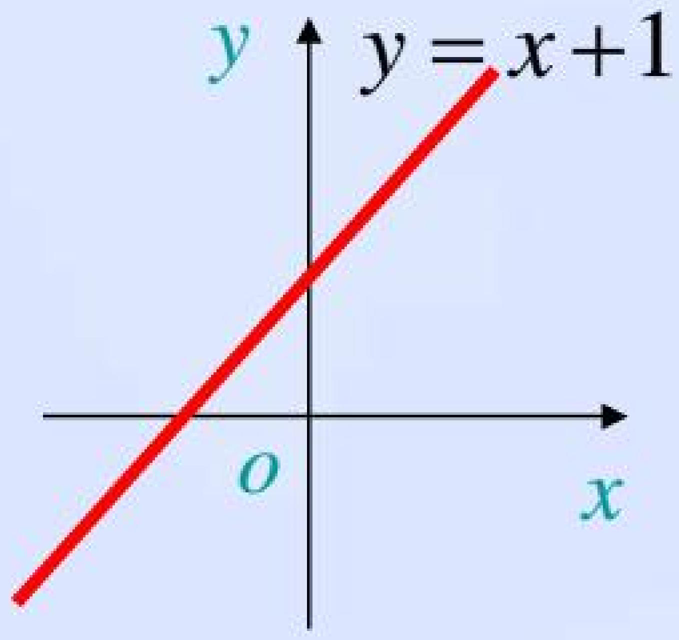
数无形时少直觉
形少数时难入微
数形结合百般好
隔离分家万事休
切莫忘，几何代数统一体
永远联系莫分离

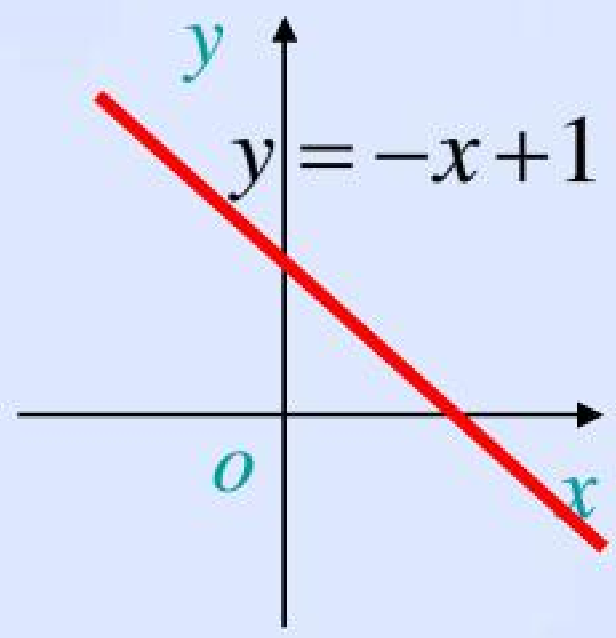
——华罗庚

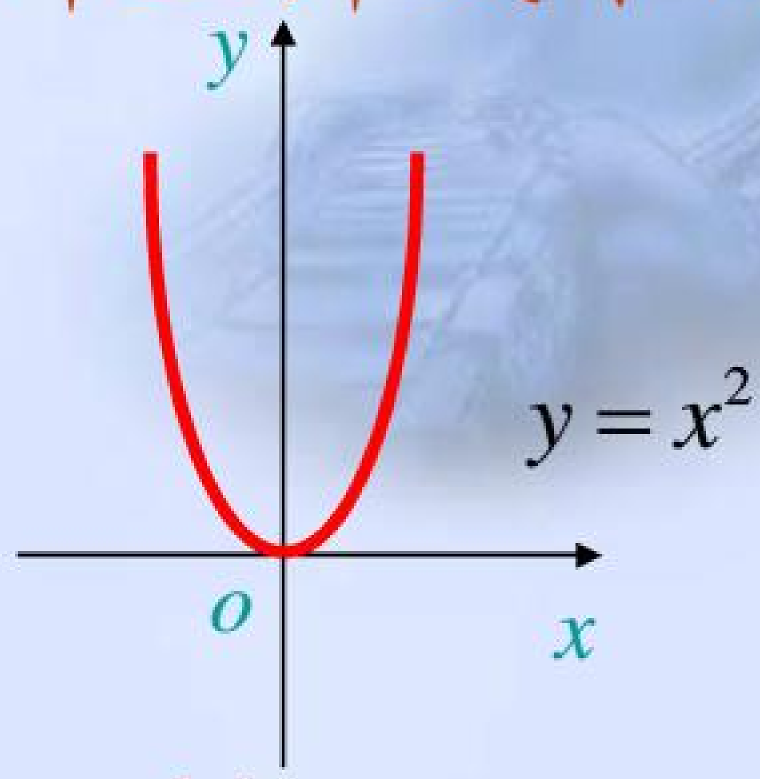


北京市8月8日一天24小时内气温随时间变化曲线图

上升　　　　下降　　　　局部上升或下降







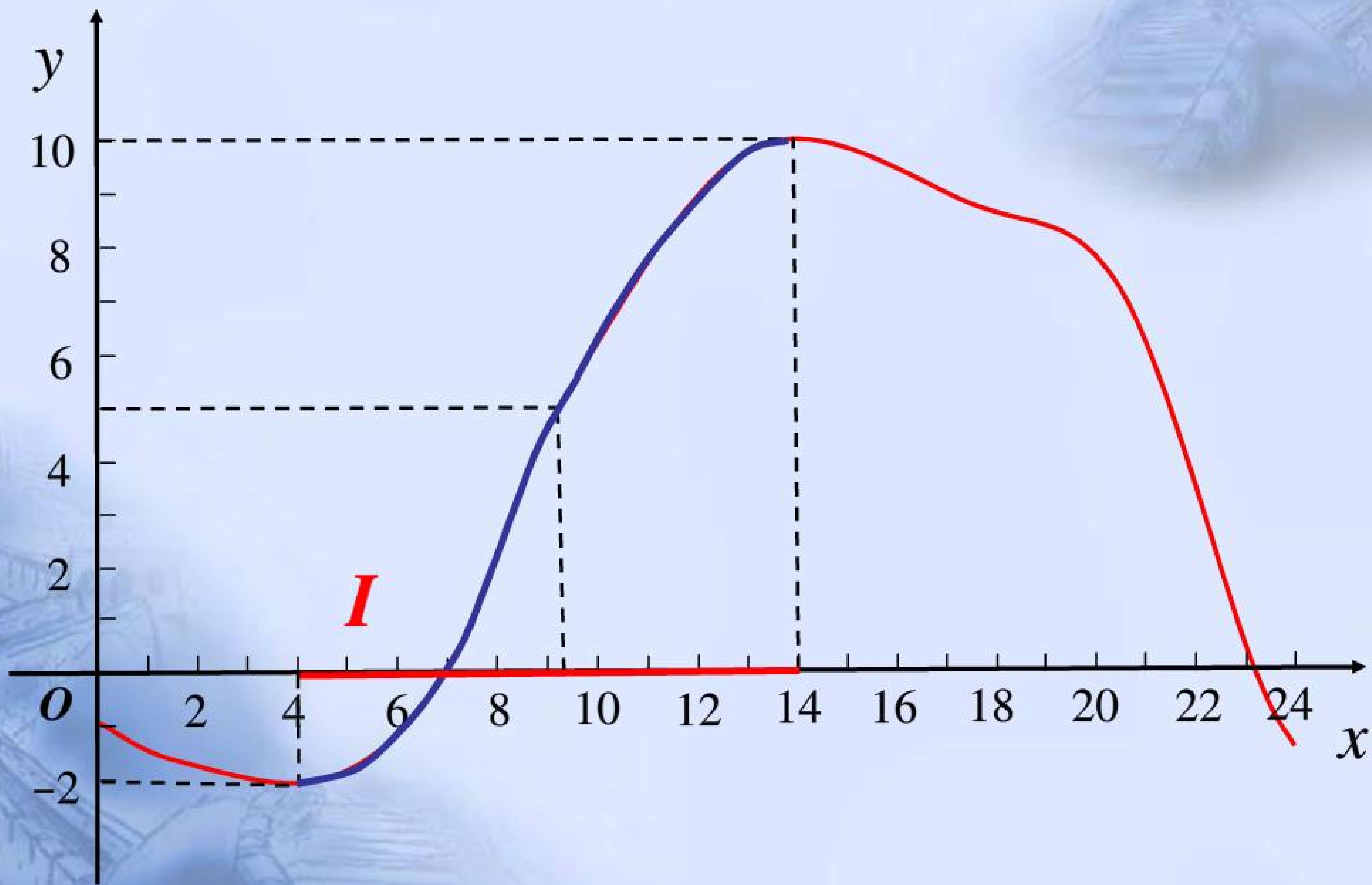
能用图象上动点 $P(x, y)$ 的横、纵坐标关系来说明上升或下降趋势吗？

函数的这种性质称为：函数的单调性

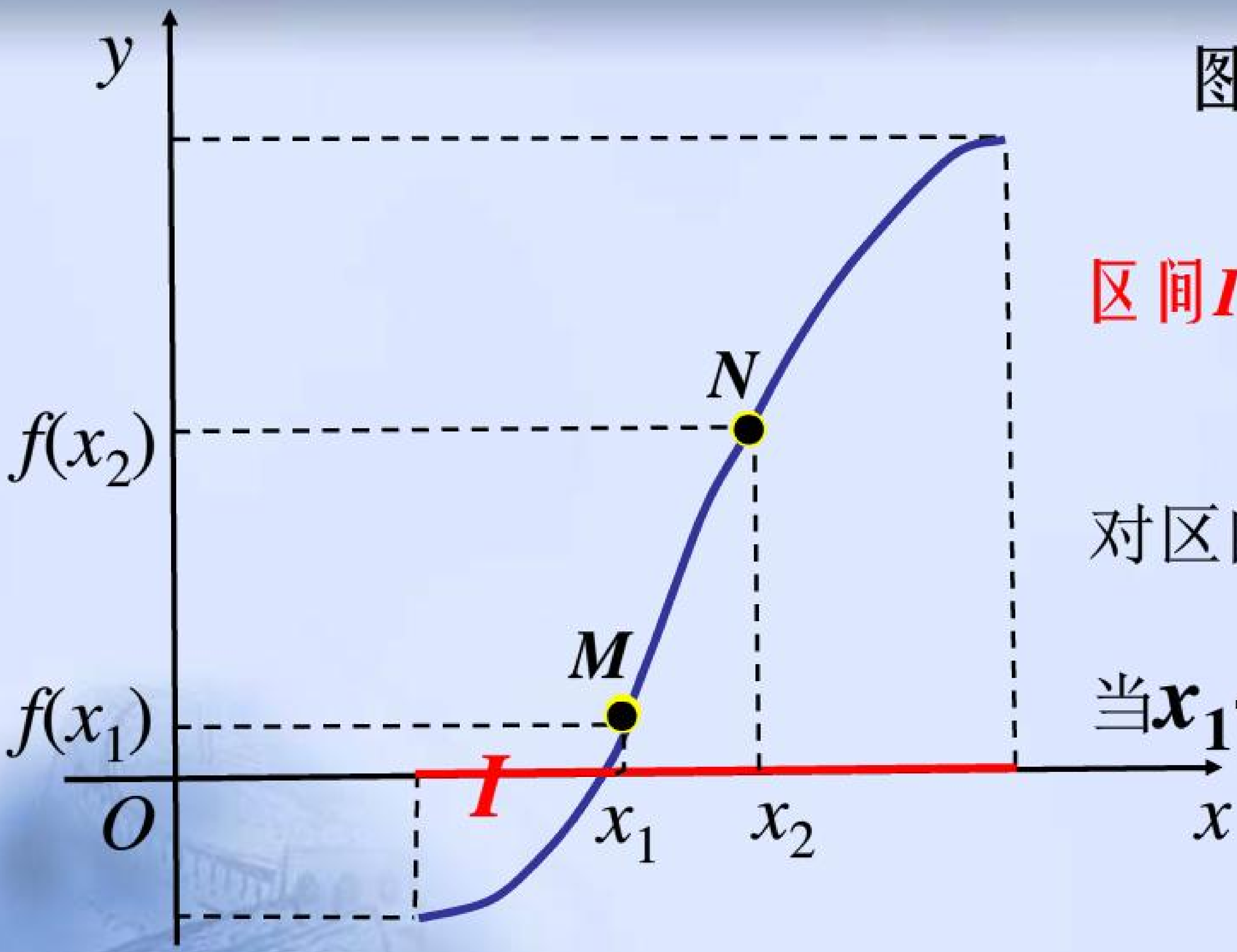
在某一区间内，

当 x 的值增大时，函数值 y 也增大——图像在该区间内逐渐上升；

当 x 的值增大时，函数值 y 反而减小——图像在该区间内逐渐下降。



y
10
8
6
4
2
-2
O
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
x
I



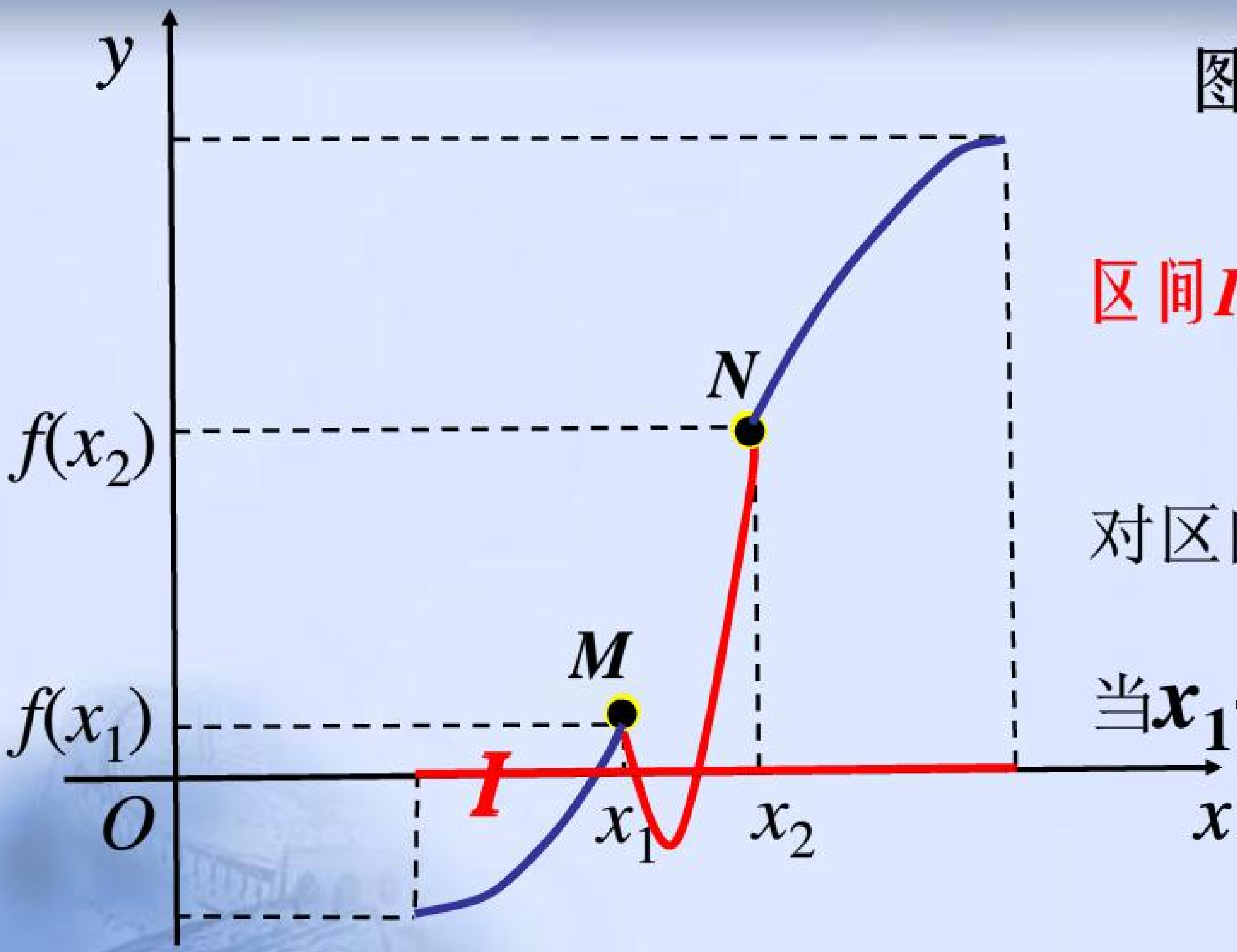
图象在区间I逐渐上升

区间I内随着x的增大，y也增大

?

对区间I内 x_1，x_2，

当$x_1<x_2$时， 有$f(x_1)<f(x_2)$

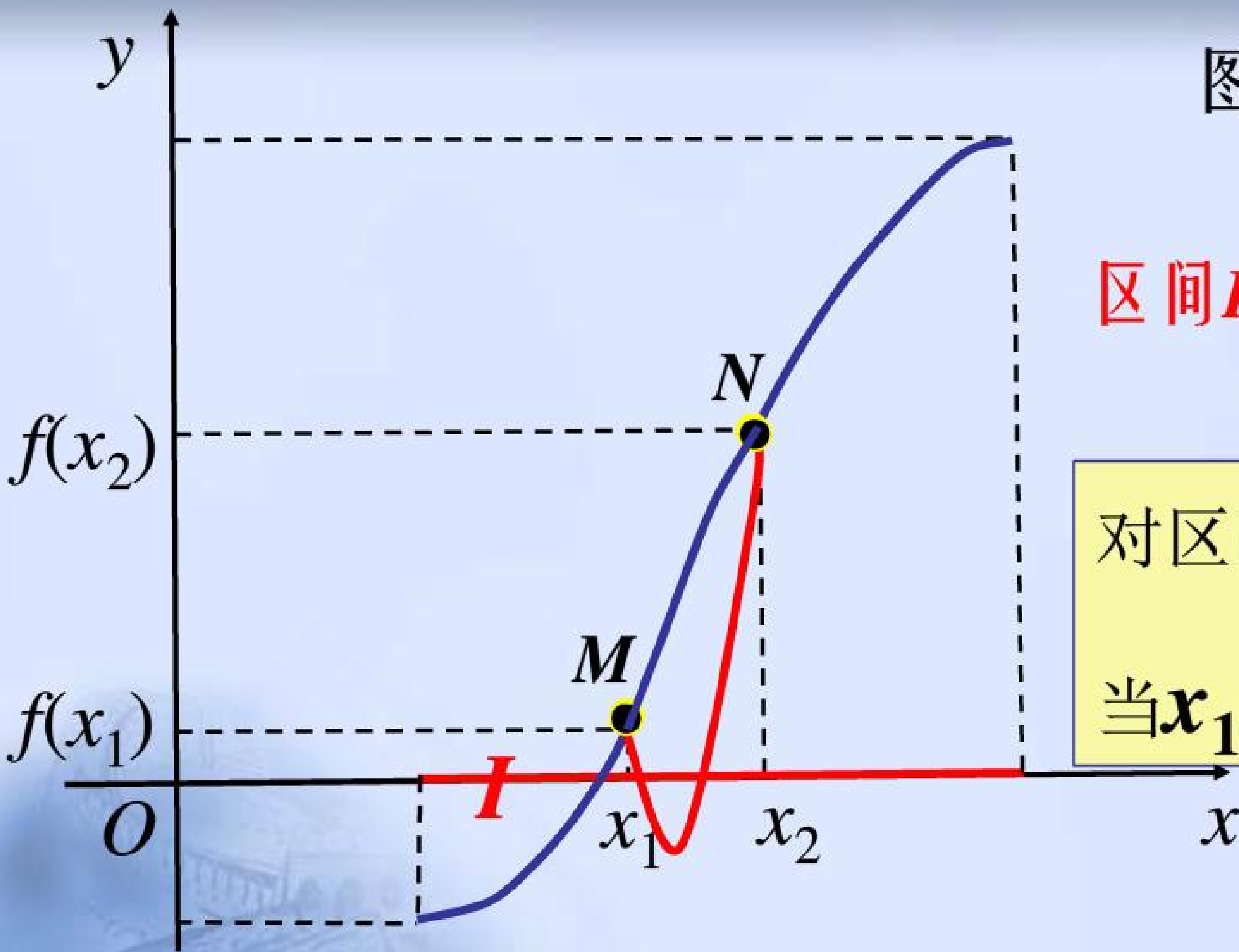


图象在区间I逐渐上升

区间I内随着x的增大，y也增大

对区间I内 任意 x_1， x_2，

当$x_1<x_2$时， 有$f(x_1)<f(x_2)$



图象在区间I逐渐上升

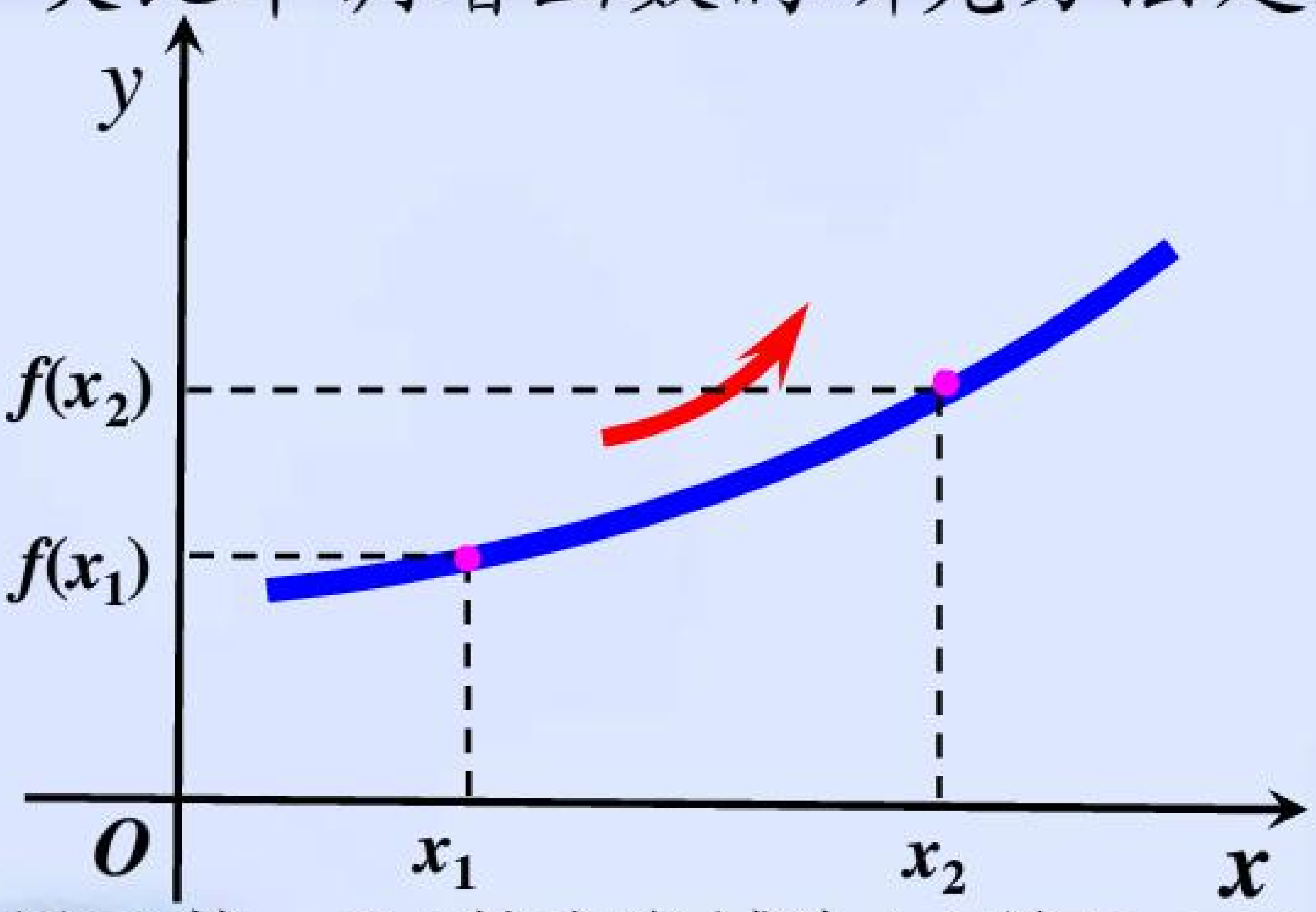
区间I内随着x的增大，y也增大

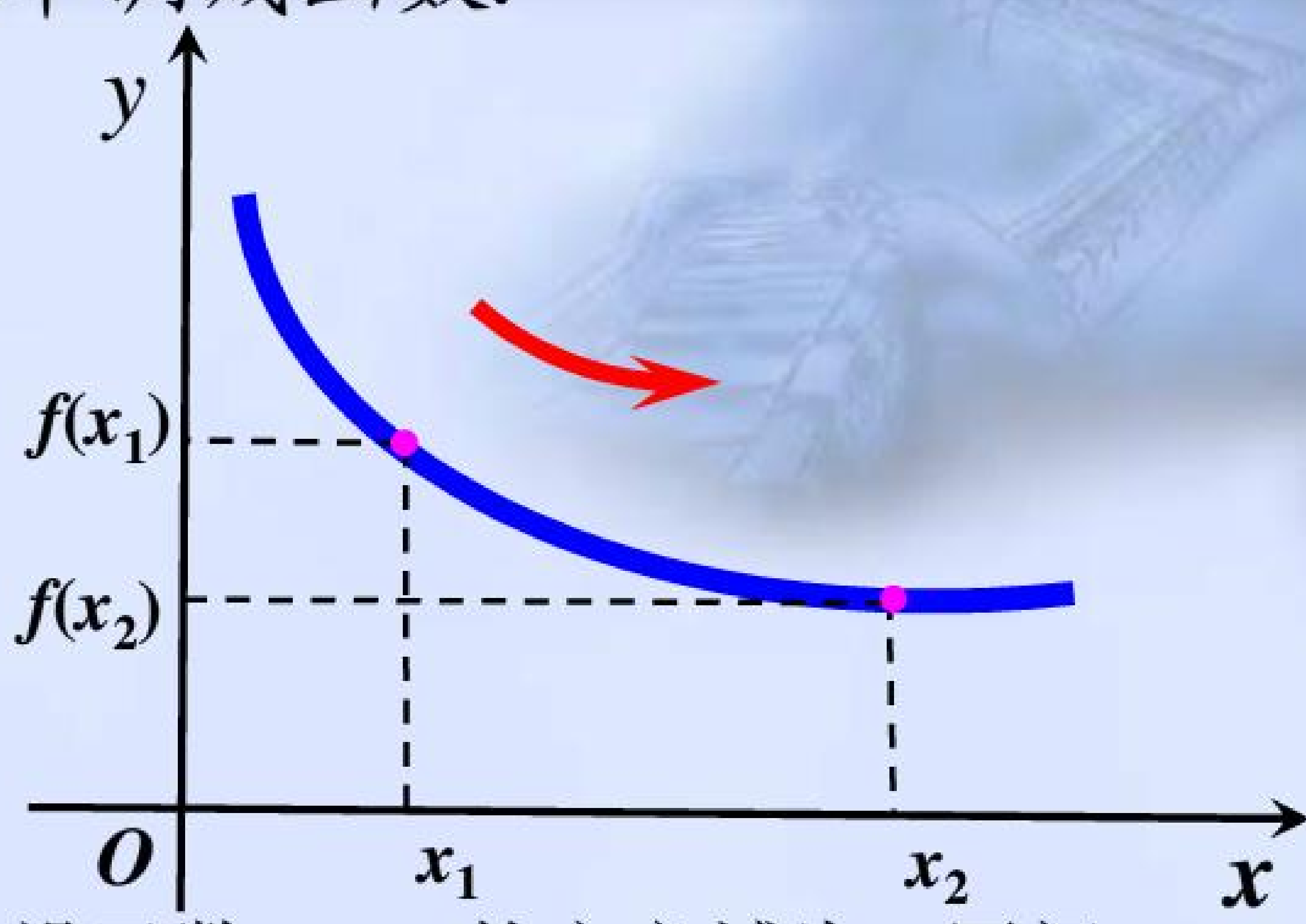
对区间I内 任意 x_1，x_2，

当$x_1<x_2$时，都 有$f(x_1)<f(x_2)$

定义 设函数$y=f(x)$的定义域为A,区间$I\subseteq A$. 如果对于区间I上的任意两个自变量的值x_1,x_2，当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)<f(x_2)$，那么就说$f(x)$在区间I上是单调增函数，I称为$f(x)$的单调增区间.

类比单调增函数的研究方法定义单调减函数.





设函数$y=f(x)$的定义域为A,区间$I \subseteq A$.

如果对于属于定义域A内某个区间I上的任意两个自变量的值x_1,x_2，

当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)<f(x_2)$，

那么就说在$f(x)$这个区间上是单调增函数，I称为$f(x)$的单调增区间.

设函数$y=f(x)$的定义域为A,区间$I \subseteq A$.

如果对于属于定义域A内某个区间I上的任意两个自变量的值x_1,x_2，

当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)>f(x_2)$，

那么就说在$f(x)$这个区间上是单调减函数，I称为$f(x)$的单调减区间.

$$\underbrace{\text{单调增区间}\qquad\text{单调减区间}}_{\text{单调区间}}$$

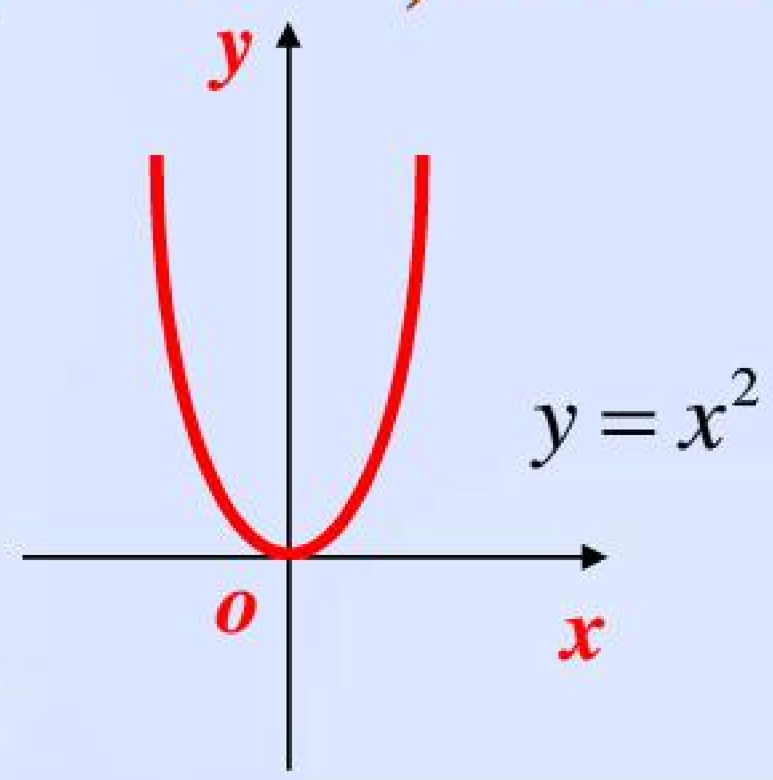
注意：

（1）如果函数 $y=f(x)$在区间I是单调增函数或单调减函数，那么就说函数 $y=f(x)$在区间I上具有单调性。

在单调区间上，增函数的图象是上升的，减函数的图象是下降的。

（2）函数单调性是针对某个区间而言的，是一个局部性质;

判断1：**函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是单调增函数；**



注意：

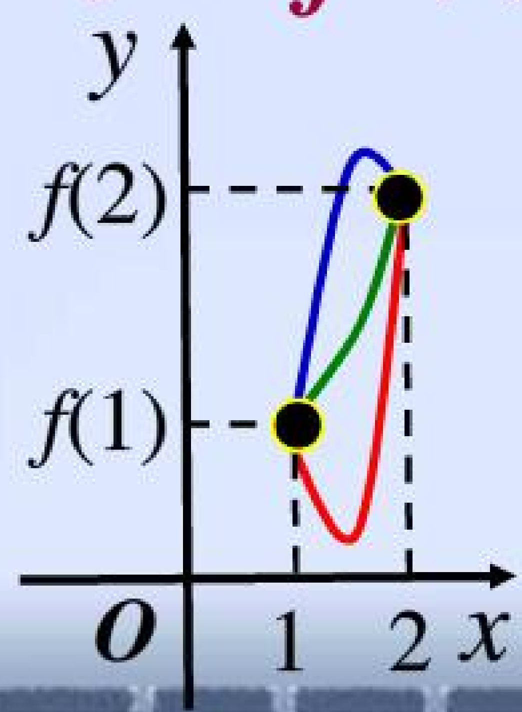
（1）如果函数 $y=f(x)$ 在区间I是单调增函数或单调减函数，那么就说函数 $y=f(x)$ 在区间I上具有单调性。

在单调区间上，增函数的图象是上升的，减函数的图象是下降的。

（2）函数单调性是针对某个区间而言的，是一个局部性质;

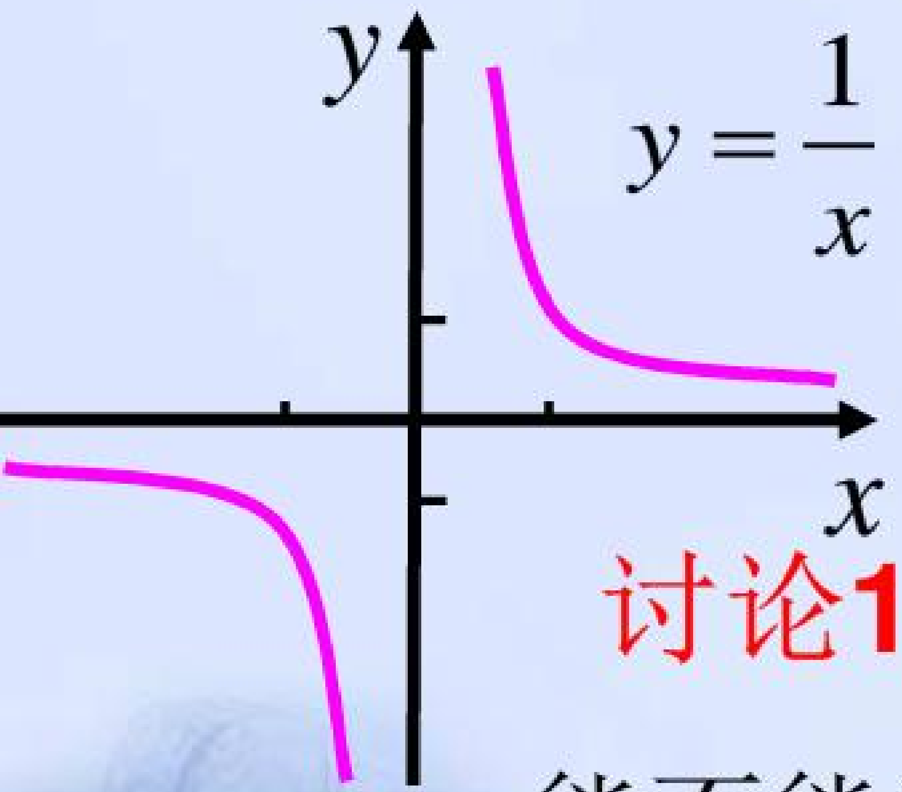
（3） x_1, x_2 取值的任意性

判断2：定义在R上的函数 $f(x)$ 满足 $f(2)>f(1)$，则函数 $f(x)$ 在R上是增函数;



例**1.**画出下列函数图像，并写出单调区间：

$$(1)\ y=\frac{1}{x}(x\neq 0);$$



$y=\frac{1}{x}$的单调减区间是$(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$? ,

讨论1：根据函数单调性的定义，

能不能说$y=\frac{1}{x}(x\neq 0)$在定义域$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上是单调减函数?

数缺形时少直观

2试讨论$f(x)=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 在$\left(-\infty,0\right)$和 $\left(0,+\infty\right)$上的单调性？

单调区间的书写：

函数在其定义域内某一点处的函数值是确定的，讨论函数在某点处的单调性无意义。若函数在区间端点处有定义，则写成闭区间，当然写成开区间也可以，若函数在区间端点处无定义，则必须写成开区间。

例3. 判断函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 在定义域$[1,+\infty)$ 上的单调性.

形少数时难入微

并给出证明

主要步骤

1. 任取x_1，$x_2 \in D$，且$x_1<x_2$;

2. 作差$f(x_1)-f(x_2)$;

3. 变形（通常是因式分解和配方）；

4. 定号（即判断差$f(x_1)-f(x_2)$的正负）；

5. 下结论

证明：在区间 $\left[1,+\infty\right)$ 上任取两个值 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$　取值

则 $f(x_1)-f(x_2)=(x_1+\dfrac{1}{x_1})-(x_2+\dfrac{1}{x_2})$　作差

$$\left.\begin{aligned}&=(x_1-x_2)+(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2})\\&=(x_1-x_2)+\frac{(x_2-x_1)}{x_1\cdot x_2}\\&=(x_1-x_2)(\frac{x_1\cdot x_2-1}{x_1\cdot x_2})\end{aligned}\right\}\text{变形}$$

$\because x_1, x_2 \in \left(1,+\infty\right)$，且 $x_1 < x_2$　$\therefore x_1-x_2<0, x_1x_2-1>0$

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0, \therefore f(x_1)<f(x_2)$　定号

所以函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 在区间上 $\left[1,+\infty\right)$ 是增函数.　结论

返回

如果证得对任意的 $x_1, x_2 \in (a,b)$，

且 $x_1 \neq x_2$ 有 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$ ，能断定

函数在区间上是增函数吗?