已知函数单调性求参数取值范围问题的解法

■ 邹生书

在函数的单调性问题中有这样一类问题：已知含有绝对值符号和参数的二次型函数在指定区间的单调性，求参数的取值范围. 这类问题由于综合性强，对学生来说是一个难点，本文通过典型例题进行解读，希望对大家有所帮助.

例1　若函数 $f(x)=ax^2+b|x|+c$ 的定义域 $\mathbf{R}$ 被分成了四个单调区间，则 a,b,c 应满足（　）

(A) $b^2-4ac>0$ 且 $a>0$　　(B) $-\frac{b}{2a}>0$

(C) $b^2-4ac>0$　　(D) $-\frac{b}{2a}<0$

解析：由题设知函数 $f(x)$ 为偶函数，其图象关于 y 轴对称. 由图象变换规律知，函数 $f(x)=ax^2+b|x|+c$ 的图象可由函数 $g(x)=ax^2+BX+C$ 的图象通过如下步骤得到：先把 $y=g(x)$ 图象在 y 轴左侧的部分去掉，然后把剩余部分沿 y 轴对称翻转到左侧，这样所得到的关于 y 轴对称的图形就是函数 $y=f(x)$ 的图象. 由画图可知，当且仅当 $y=g(x)$ 的对称轴在 y 轴右侧时，才能使函数 $y=f(x)$ 存在四个单调区间，故应选 B.

点评：本解法从偶函数图象关于 y 轴对称切入，从画法入手从图象变换作图感知得出结论. 其中含有绝对值的二次型函数 $f(x)$ 和不含绝对值的二次函数 $g(x)$ 它们的图象关系，以及 $g(x)$ 图象的对称轴和 $f(x)$ 图象关于 y 轴是问题解决的关键.

例2　若函数 $f(x)=x^2+|x-a|+b$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上为减函数，则实数 a 的取值范围是________.

分析：去掉绝对值是解决本题的切入点，因为讨论的区间是 $(-\infty,0]$，故要去掉绝对值符号首先需要对 a 与这个区间的位置关系即 a 的符号进行讨论，其次在去掉绝对值符号后应关注图象对称轴求出单调减区间，最后看区间 $(-\infty,0]$ 是否为该单调减区间的子集.

解：(1) 当 $a\geqslant 0$ 且 $a\leqslant x\leqslant 0$ 时，$f(x)=x^2+|x-a|+b=x^2-x+a+b$，图象对称轴为 $x=\frac{1}{2}$，所以 $f(x)$ 的减区间为 $(-\infty,\frac{1}{2}]$，而 $(-\infty,0]\subseteq(-\infty,\frac{1}{2}]$，故 $f(x)$ 函数在区间 $(-\infty,0]$ 上为减函数，适合题意.

(2) 当 $a<0$ 且 $a\leqslant x\leqslant 0$ 时，$f(x)=x^2+|x-a|+b=x^2+x+b-a$，图象对称轴为 $x=-\frac{1}{2}$. ①若 $-\frac{1}{2}<a<0$，则 $f(x)$ 在区间 $[a,0]$ 单调递增，不合题意；②若 $a\leqslant-\frac{1}{2}$，则 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{1}{2},0]$ 单调递增，也不合题意.

综合 (1)(2) 知，若函数 $(x)=x^2+|x-a|+b$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上为减函数，则实数 a 的取值范围是 $a\geqslant 0$.

例3　已知函数 $f(x)=x|x-a|+2x-3$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，则 a 的取值范围是________.

解析：先将原函数去掉绝对值化为分段函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+(a+2)x-3, & x\leqslant a,\\ x^2+(a-2)x-3, & x>a.\end{cases}$ 因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，又 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，所以问题等价于 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 和 $(a,+\infty)$ 上均为增函数.

当 $x\leqslant a$ 时，$f(x)=-x^2+(a+2)x-3)$. 而函数 $g(x)=-x^2+(a+2)x-3$ 的对称轴为 $x=\frac{a+2}{2}$，增区间为 $(-\infty,\frac{a+2}{2}$，所以要 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上为增函数，则当且仅当 $(-\infty,a)\subseteq(-\infty,\frac{a+2}{2})a$ 即 $\frac{a+2}{2}\geqslant a$，解得 $a\leqslant 2$①.

当 $x\leqslant a$ 时，$f(x)=x^2-(a-2)x-3$. 而 $h(x)=x^2-(a-2)x-3$ 的对称轴为 $x=\frac{a-2}{2}$，增区间为 $(\frac{a-2}{2},+\infty)$，所以要 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上为增函数，则当且仅当 $(a,+\infty)\subseteq(\frac{a-2}{2},+\infty)$ 即 $\frac{a-2}{2}\leqslant a$，解得 $a\geqslant-2$②.

由①②得 $-2\leqslant a\leqslant 2$，故所求 a 的取值范围是 $[-2,2]$.

例4　（2011年湖南师大附中月考题）若函数 $f(x)=|x|(x-b)$ 在 $[0,2]$ 上是减函数，则实数 b 的取值范围是（　）

(A) $(-\infty,4]$　　(B) $(-\infty,2]$

(C) $[2,+\infty)$　　(D) $[4,\infty)$

分析：由于本题是一道选择题故有间接求解和直接求解两种思路.

解法1：（用排除法）当 $b=0$ 且 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=x^2$ 在 $[0,2]$ 上是增函数，排除 (A)，(B). 当 $b=2$ 且 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=x^2-2x$ 在 $[0,1]$ 上递减在 $(1,2]$ 上递增，不合条件，排除 (C). 故选 (D).

解法2：（特殊值法）因为函数 $f(x)=|x|(x-b)$ 在 $[0,2]$ 上是减函数，所以 $f(0)>f(2)$，即 $0>2(2-b)$，所以 $b>2$，故选 (D). 也可选 $f(1)>f(2)$ 得，$1-b>2(2-b)$，所以 $b>3$，从而选 (D).

[湖北省阳新县高级中学（435200）]