浅谈二项分布与超几何分布的数学期望

辽宁工程技术大学基础教学部 李 娜 王 磊

[摘 要] 本文给出了二项分布和超几何分布数学期望的求解方法,讨论了两者之间的关系,文中的具体实例说明了这一点。

[关键词] 二项分布 超几何分布 数学期望

二项分布与超几何分布是离散型随机变量中比较重要的分布,两者既有联系又有区别。随机变量的数学期望是反映随机变量的一个重要数字特征,在概率论中占有相当重要的地位,弄清楚两种分布的数学期望对于初学者尤为重要。

1.两种分布

定义 1 设有 N 件产品,其中有 M 件正品,从中按有放回的抽样方式任取 $n(n\leqslant N)$件,以 X 表示 n 件正品的个数,则恰有 $m(m\leqslant M)$件正品的概率为

$$P\{X=m\}=\frac{C_n^m\cdot M^m\cdot(N-M)^{n-m}}{N^n}$$

$$=C_n^m\left(\frac{M}{N}\right)^m\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-m}$$

若令 $\frac{M}{N}=p$,则 $P\{X=m\}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m},m=0,1,2,\cdots,n$

称随机变量 X 服从二项分布,记为 $X\sim B(n,p)$。当 n=1 时,X 服从 0-1 分布。

定义 2 设有 N 件产品,其中有 M 件正品,从中按不放回的抽样方式任取 $n(n\leqslant N)$件,以 Y 表示 n 件正品的个数,则恰有 $m(m\leqslant M)$件正品的概率为

$$P\{Y=m\}=\frac{C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

称随机变量 Y 服从超几何分布,记为 $Y\sim H(n,M,N)$

2.分布的关系

若随机变量 X 服从二项分布 $X\sim B(n,p)$,则 X 可以看作 n 个相互独立的服从 0-1 分布的随机变量的和。若随机变量 Y 服从超几何分布,即 $Y\sim H(n,M,N)$,Y 也可以看作是 n 个服从 0-1 分布的随机变量 $Y_i,(i=1,2,\cdots,n)$的和,Y_i 表示第 i 次抽样抽到正品的个数。根据抽签原理 $p\{Y_i=1\}=\frac{M}{N}$,若 $i\neq j$,则 Y_i 与 Y_j 是不独立的。即说明超几何分布中的这 n 个 0-1 分布的随机变量并不是相互独立的。因此在实际应用时,要注意两者的区别。

在实际应用中元素的个数 N 是相当大的,例如,从一个工厂的几十万件产品中任抽几千件观察等。因而在 N 非常大的实际问题中,放回抽样和不放回抽样的相应事件发生的概率几乎是相同的。因此,则当抽样数 n 保持不变且远小于样本数 N 即也小于 M 和 N－M 时,有

引理 1[1] 超几何分布的极限分布是二项分布。

证明:

$$P\{Y=m\}=\frac{C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

$$\approx\frac{\frac{M^m}{m!}\cdot\frac{(N-M)^{n-m}}{(n-m)!}}{\frac{N^n}{n!}}=\frac{n!}{m!(n-m)!}\left(\frac{M}{N}\right)^m\left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-m}$$

$$=C_n^m p^m q^{n-m}$$

二项分布是有放回抽样,而超几何分布是不放回抽样。引理 1 说明,对于不放回抽样,当抽样数 n 保持不变且远小于样本数 N 同时也小于 M 和 N－M 时,超几何分布中的 $\frac{M}{N}$ 相当于二项分布中的参数 p,而 $\frac{N-M}{N}$ 相当于二项分布中的 1-p。

3.分布的期望

我们先给出二项分布的期望,二项分布的期望可用定义法[2]或者把二项分布分成 n 个相互独立的 0-1 分布的随机变量的和,利用期望的性质[3]求解。于是有,若 $X\sim B(n,p)$则 $E(X)=np$,再根据上面记法,即 $E(X)=n\cdot\frac{M}{N}$。

对于超几何分布的期望,设 $Y\sim H(n,M,N)$,则求期望 E(Y)也相应的有两种方法。

解法 1(定义法):

$$E(Y)=\sum_{m=0}^{n}mP\{Y=m\}=\sum_{m=0}^{n}m\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

$$=\frac{1}{C_N^n}\sum_{m=1}^{n}m\cdot\frac{M!}{m!(M-m)!}\cdot C_{N-M}^{n-m}$$

$$=\frac{M}{C_N^n}\sum_{m=1}^{n}\frac{(M-1)!}{(m-1)!(M-m)!}\cdot C_{N-M}^{n-m}$$

令 k=m-1,则

$$E(Y)=\frac{M}{C_N^n}\sum_{k=0}^{n-1}C_{M-1}^k C_{N-M}^{n-1-k}=\frac{M}{C_N^n}C_{N-1}^{n-1}=n\frac{M}{N}$$

解法 2(利用性质):因为 Y 看作 n 个互不独立但仍然服从 0-1 分布的随机变量 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 的和,即 $Y=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$,其中 $E(Y_i)=p=\frac{M}{N}$,$i=1,2,\cdots,n$,因此

$$E(Y)=E\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)=\sum_{i=1}^{n}E(Y_i)=np=n\frac{M}{N}$$

二项分布与超几何分布的数学期望相同,在求解时都可以用两种方法,但定义法比较麻烦,利用期望的性质比较简单。需要说明一点,随机变量和的期望等于随机变量期望的和,这里并不要求和中的随机变量相互独立。

例 1 已知 100 个产品中有 10 个次品,求任意取出的 5 个产品中次品数的期望值。

解:文献[4]给出了两种方法:第一种是求出 5 个产品中次品数的分布率,然后利用定义求解;第二种是利用分解法(利用性质)。对于本题,令 X 表示 5 个产品中次品数,经分析 $X\sim H(n,M,N)$,直接利用公式得 $E(X)=n\cdot\frac{M}{N}=5\frac{10}{100}=0.5$。

若认为 $X\sim B(n,p)$,其中 $n=5,p=\frac{M}{N}=\frac{10}{100}=0.1$,则由二项分布的期望得 $E(X)=np=5\times0.1=0.5$,虽然结果是正确的,但计算过程不对,因为随机变量 X 服从超几何分布而不是二项分布。

例 2 一民航送客车载有 20 位旅客自机场开出,旅客有 10 个车站可以下车,如到达一个车站没有旅客下车就不停车。以 X 表示停车的次数,求 E(X)(设每位旅客在各自车站是等可能的,并设各旅客是否下车相互独立)。

解 我们先给出文献[3]的方法

引入随机变量

$$X_i=\begin{cases}0,\text{在第 i 站无人下车},\\1,\text{在第 i 站有人下车},\end{cases}i=1,2,\cdots,10$$

易知 $X=X_1+X_2+\cdots+X_{10}$,现在来求 E(X)。

按题意,任一旅客在第 i站不下车的概率为 $\frac{9}{10}$,因此 20 位旅客在第 i 站都不下车的概率为 $\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$,在第 i 站有人下车的概率为 $1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$。

也就是 $P\{X_i=0\}=\left(\frac{9}{10}\right)^{20},P\{X_i=1\}=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20},i=1,2,\cdots,10$

由此 $E(X_i)=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20},i=1,2,\cdots,10$

进而

$$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_{10})$$
$$=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_{10})$$
$$=10\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right]=8.784(\text{次})$$

将 X 分解成数个随机变量之和,然后利用随机变量和的数学期望等于随机变量数学期望之和。这种处理方法有一定的普遍意义,且在某种程度上可以简化问题。

我们看另外一种做法合不合理,令 $\overline{X}$ 表示不停车的次数,则 $E(X)=10-E(\overline{X})$,又因为 $\overline{X}\sim B(10,p)$,其中 P 为任一站不停车的概率,由上面的方法知 $p=\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$,所以 $E(\overline{X})=np=10\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$,则 $E(X)=10-10\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{20}=10\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right]=8.784$(次),和上面的结果一致。但经仔细分析求解过程,发现是不对的,因为 $\overline{X}$ 根本就不服从二项分布,因为每一站不停车或者停车并不是相互独立的,比如前 9 站不停车,则第 10 站一定停车。因此,第一种做法不要理解为随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 是相互独立的。

参考文献

[1] 陈魁.应用概率统计[M].北京:清华大学出版社,2000.03.
[2] 何春.浅淡离散型随机变量的数学期望[J].高等数学研究,2001,4(3):35-36.
[3] 高雷阜,柴岩.概率论与数理统计[M].北京:高等教育出版社,2009.02.
[4] 姜玉英,刘强.离散型随机变量数学期望的几种巧妙算法[J].大学数学,2008,24(5):153-154.