二項展开式中的最大系数

程 凱 丞

关于二項展开式的特点，課本里是分做八个性質来叙述的，其中第六个性質就牽涉到二項展开式中的最大系数問題（代数第三册，22頁）。通过第五个性質的講解，我們已作出二項展开式系数对称性的結論：和兩端等距項的兩項的系数都相等．又由于展开式的系数与組合数相关联，我們已經看出了系数絕对值起始漸增，后来漸減；因而确信最大系数必定在展开式的正中．在这样初步認識的基础上，接着提出下面二个問題：1）在什么样的情况下展开式中存在着一个最大系数？在什么样的情况下存在着兩个最大系数？2）最大系数究竟是展开式中第几項的系数？怎样迅速而合理地把它計算出来？这样，就順利地过渡到新的課題——最大系数上面来了．

正确地指出展开式中最大系数的項数，首先可以使学生更明确地領会这段教材，另一方面，以后学生在实际計算中，有預見地把展开式写到正中項，然后依照系数对称性去补足它，借此以培养学生的熟練技巧．

例如 $(x+a)^7=x^7+7ax^6+21a^2x^5+$

$+35a^3x^4+\cdots$（先写到正中項）

$=x^7+7ax^6+21a^2x^5+35a^3x^4+$

$+35a^4x^3+21a^5x^2+7a^6x+a^7.$

（再依对称性补足它）

在講解过程中，首先分析这个問題的性質，說明展开式的系数是用組合数来表示的；因此求最大系数的問題本質上也就是求最大組合数的問題．說明我們要解决这样一个問題：当 n 的数值已知时，k 取什么样的数值能使 C_n^k 的数值为最大？其次，用函数的观点来处理，把 C_n^k 視作函数，把其中的 k 視作变数，同时指出：1）此中 k 的允許值集合是非負整数；2）根据展开式系数的实际意义，k 只許在 $0\leqslant k\leqslant n$ 的范圍內变化．

为了說明問題变得明显些，先举一二个極簡單的例子，用实驗、观察的方法来建立初步的認識，然后再推广到一般．現在打算分做下面兩个步驟来貫徹它．

1. 若 n 为奇数，則当 $k=\frac{n+1}{2}$ 或 $k=\frac{n-1}{2}$ 时 C_n^k 的值为最大

用数（自 0 至 7）代替 C_7^k 中的 k，計算 C_7^k 的对应值，並把它以表格的形式列出来：

k	0	1	2	3	4	5	6	7
C_7^k	1	7	21	35	35	21	7	1

由观察可知，当 $k=3$ 或 4 时 C_7^k 的值为最大，而且位置在正中．于是进一步提問学生如何把 k 与 n 联系起来？从表可以看出，当 $k=\frac{7+1}{2}=4$ 或 $k=\frac{7-1}{2}=3$ 时 C_7^k 的值为最大．再把这例概括便得：当 $k=\frac{n+1}{2}$ 或 $k=\frac{n-1}{2}$ 时 C_n^k 有最大值．

为什么会如此呢？我們再用一些数学的基本法則来剖析它的根据：联系算术分数乘法，說明一个自然数乘以一个假分数則变大，乘以眞分数則变小；然后把一串計算組合数的式子（列表时所計算的）进行排队，並加以說明：

$$C_7^1=7=\frac{7}{1},$$

$$C_7^2=\frac{7\cdot6}{1\cdot2}=\frac{7}{1}\times\frac{6}{2}=C_7^1\times\frac{6}{2}$$

（因为乘以假分数 $\frac{6}{2}$，故取 2 的組合数比取 1 的大）

$$C_7^3=\frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}=\frac{7}{1}\times\frac{6}{2}\times\frac{5}{3}=C_7^2\times\frac{5}{3},$$

（因为乘以假分数 $\frac{5}{3}$，故取 3 的組合数比取 2 的大）

$$C_7^4=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=\frac{7}{1}\times\frac{6}{2}\times\frac{5}{3}\times\frac{4}{4}=$$

$$=C_7^3\times\frac{4}{4},$$

（因为乘以假分数 $\frac{4}{4}$，故取 4 的組合数和取 3 的相同）

$$C_7^5=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=\frac{7}{1}\times\frac{6}{2}\times\frac{5}{3}\times\frac{4}{4}\times$$

$$\times\frac{3}{5}=C_7^4\times\frac{3}{5},$$

（因为乘以眞分数 $\frac{3}{5}$，故取 5 的組合数比取 4 的小了）

. . . .

由此可知，从 7 个不同的元素中每次取 3 个或取 4 个时，其組合数为最大.

以此为基础，再来研究它的一般情况：

于通項公式的系数（从 n 个元素中每次取 k 个的組合数）中，已知分子有 k 个因数，

$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots k}\quad(1)$$

分母也有 k 个因数；因此可以把公式的右边改写成 k 个分数連乘积的形式：

$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots k}=$$

$$=\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\cdots\times\frac{n-k+1}{k}.\quad(2)$$

把（2）式右边 k 个分数加以檢查，諸乘数的分子自 n 起依次減少 1 个單位，越来越小（最后可能小到 1 为止）；諸乘数的分母自 1 开始，依次增加一个單位，越来越大（最后大到 n 为止）．現在假定 n 为奇数，則諸乘数的分子与分母，或者同为奇数，或者同为偶数，諸乘数中必有一个等于 1 的假分数．所以（2）式右边最后的一个乘数，当分子与分母相等时，所得組合数为最大．把这个条件列成方程，則得

$$\underbrace{n-k+1}_{\text{分子}}=\underbrace{k}_{\text{分母}}.$$

$$\therefore\quad k=\frac{n+1}{2}\ \text{时組合数最大.}$$

又依組合的性質，由于

$$C_n^{\frac{n+1}{2}}=C_n^{n-\frac{n+1}{2}}=C_n^{\frac{n-1}{2}},$$

故知当 $k=\frac{n-1}{2}$ 时組合数亦为最大.

2. 若 n 为偶数，則当 $k=\frac{n}{2}$ 时 C_n^k 的值为最大

用同样方法，先用数（自 0 至 6）代替 C_6^k 中的 k 計算 C_6^k 的对应値，並把它列成表：

k	0	1	2	3	4	5	6
C_6^k	1	6	15	20	15	6	1

由表可知，当 $k=3$ 时，C_6^k 的值最大，而且恰好位置在正中．把 k 与 n 联系起来的結果是 $k=\frac{n}{2}$．同样用一連串計算組合数的式子来进行剖析：

$$C_6^1=\frac{6}{1},$$

$$C_6^2=\frac{6\cdot5}{1\cdot2}=\frac{6}{1}\times\frac{5}{2}=C_6^1\times\frac{5}{2},$$

（乘以 $\frac{5}{2}$，故取 2 的組合数比取 1 的大）

$$C_6^3=\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}=\frac{6}{1}\times\frac{5}{2}\times\frac{4}{3}=C_6^2\times\frac{4}{3},$$

（乘以 $\frac{4}{3}$，故取 3 的組合数比取 2 的大）

$$C_6^4=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=\frac{6}{1}\times\frac{5}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}=$$

$$=C_6^3\times\frac{3}{4},$$

（乘以眞分数 $\frac{3}{4}$，故取 4 的組合数比取 3 的小）

. . . .

由此可知，从 6 个不同的元素中以每次取 3 个的組合数为最大.

再来研究它的一般情况.

同样地把通項公式的系数写成

$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots k}=$$

$$=\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\cdots\times\frac{n-k+1}{k}$$

的形式，講解过程与上节相仿，其中显著不同之

处，在于着重指出：当 n 为偶数时，上式右边 k 个乘数中，分子为偶数时则分母为奇数，分子为奇数时则分母为偶数．因此分子与分母永远不能相等．其次，我們考慮比 1 大而与 1 最相接近的一个乘数，其分子必比分母大 1．用方程来表示，即

$$\underbrace{n-k+1}_{\text{分子}}=\underbrace{k+1}_{\text{分母}},\quad \therefore\quad k=\frac{n}{2}.$$

根据 $(x+a)^m$ 的通項公式

$$T_{k+1}=C_n^k a^k x^{n-k}$$

即可确定最大系数的項数是 $k+1$.

綜上所述，作出結論如下：

若 n 为偶数，则 $k=\frac{n}{2}$ 时，C_n^k 的值最大．

若 n 为奇数，则 $k=\frac{n+1}{2}$ 或 $k=\frac{n-1}{2}$ 时，C_n^k 的值最大．

三面角的面角性質

馬　　明

立体几何課本已經給出

定理 1 对于任一三面角，有下列兩性質成立

$$\text{(i)}\ \begin{cases}\alpha<\beta+\gamma,\\ \beta<\gamma+\alpha,\\ \alpha<\alpha+\beta;\end{cases}\qquad \text{(ii)}\ \alpha+\beta+\gamma<360^\circ.$$

（其中 α,β,γ 为三面角的三个面角）

因此条件（i）和条件（ii）是用一組角（α,β,γ）做面角，能構成三面角的必要条件．假如用一組角（$100^\circ,10^\circ,15^\circ$）做面角，就不能構成三面角，因为它們滿足条件（ii）而不滿足条件（i）．用一組角（$100^\circ,120^\circ,140^\circ$）做面角，也不能構成三面角，因为它們滿足条件（i）而不滿足条件（ii）．但是同时滿足条件（i）和条件（ii）的三个角，假如（$100^\circ,70^\circ,40^\circ$），用它們做面角，能否構成三面角？即，条件（i）和条件（ii）是否为充分的呢？現行立几課本里沒有給出答复*．本文目的就在于对此做出結論——建立其充分条件．

引理 1 对于任一三面角，必有关系式

$$\cos A=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$

成立，其中 α,β,γ 是三面角的面角，而面角 α 所对的二面角等于 A.

証明．（参見数学通报 1957 年 11 月号“关于三面角的几个計算公式及正多面体中的二面角的求法”一文）

引理 2 若 α,β,γ 是滿足条件（i）和条件（ii）的一組角，则

$$\left|\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}\right|<1.$$

（注意：不能从引理 1 直接写出引理 2，因为这里的一組角（α,β,γ）和引理 1 中一組角（α,β,γ）具有不同的假設）

証明．先証不等式

$$\text{(iii)}\qquad \cos\alpha>\cos(\beta+\gamma)$$

成立．

为此，分别在区間 $(0,\pi)$ 和半閉区間 $[\pi,2\pi)$ 內进行証明．

在区間 $(0,\pi)$ 內，余弦函数是降函数，由假設 $\alpha<\beta+\gamma$，便得 $\cos\alpha>\cos(\beta+\gamma)$，

再考慮半閉区間 $[\pi,2\pi)$ 內的情形：

設 $\beta+\gamma=\pi+k$.（$0\leqslant k<\pi$）

由假設　$\alpha+\beta+\gamma<2\pi$,

即　$\alpha<2\pi-(\beta+\gamma)=2\pi-(\pi+k)$,

便得　$\alpha<\pi-k$.

* 刘薰宇所編立体几何在習題八第 1 題的（ii）中曾提出“用一組角（$100^\circ,70^\circ,40^\circ$）做面角，能不能構成三面角”的問題．虽然这一組角符合条件（i）和条件（ii），但是“能否構成三面角”？学生在那里还是不能做出肯定的答复．然而事实上，不小心的学生甚至教师对此已經做出肯定的答复——能構成三面角．这是缺乏根据的．因此我認为这种尙不能做肯定答复而又容易造成錯覺的練習不宜布置在这里．新編立几課本已注意到这一点，所以那里所給出的各組角都是不能同时滿足条件（i）和条件（ii）的．