浅谈复系数一元二次方程的根

安徽灵璧中学　　侯立刚　（邮编：234200）

我们知道，对于实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a、b、c\in R，a\neq 0)$，可用 $\Delta=b^2-4ac$ 与 0 的关系来判断有无实数根，并且可用求根公式求此方程的根，那么对于复系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a、b、c\in C，a\neq 0)$ 怎样求根，怎样判断实根的情况？

1. 求根公式

命题(一)：方程 $ax^2+bx+c=0(a、b、c\in C，a\neq 0)$ 的求根公式是：

$$x=\frac{-b+[(b^2-4ac)\text{的平方根}]}{2a}。$$

证明　对方程左边进行配方并移项：

$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$，$\therefore$ $(x+\frac{b}{2a})$ 是 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 的平方根，而 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 的平方根 $=\frac{(b^2-4ac)\text{的平方根}}{2a}$，

$$\therefore (x+\frac{b}{2a})=\frac{(b^2-4ac\text{ 的平方根}}{2a},$$

即 $x=\frac{-b+[(b^2-4ac)\text{的平方根}]}{2a}$。

显然，当 $a,b,c\in R$ 时，就是我们熟知的求根公式。

例 1　解方程：$2x^2-(5-i)x+6=0$。

解　$\because \Delta=b^2-4ac=[-(5-i)]^2-4\times 2\times 6$

$$=-24-10i=(1-5i)^2,$$

$$\therefore x=\frac{5-i\pm(1-5i)}{4},$$

于是　$x_1=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$，$x_2=1+i$。

2. 根与系数的关系

命题(二)：设方程 $ax^2+bx+c=0(a、b、c\in C，a\neq 0)$ 两根为 x_1,x_2，

那么　$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$。

证明　由命题(一)知，方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根为

$$x=\frac{-b+[(b^2-4ac)\text{的平方根}]}{2a}。$$

不妨设：b^2-4ac 的平方根为 $m+ni$，$-(m+ni)$，$(m、n\in R)$

于是　$x_1=\frac{-b+(m+ni)}{2a}$，$x_2=\frac{-b-(m+ni)}{2a}$，

易知　$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，

$$x_1\cdot x_2=\frac{(-b)^2-(m+ni)^2}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}。$$

例 2　求作一个一元二次方程，使它的两根分别为 $2-i$，$1+i$。

的过程中，总免不了会遇到困难和挫折，因而要有坚强的意志，使学习的意志能经常保持下来。对于数学成绩稍差的学生，在教学中要减少他们的困难，要注意弥补他们在基础知识和基本技能方面的缺陷。要提供机会，帮助他们成功，让他们在成功的体验中增强信心，锻炼意志。在数学课本上往往会遇到一大堆符号，一定要让学生明其妙，知其理，领会其中之美。决不可使学生莫名其妙，囫轮吞枣，死记硬背！

4. 信心在学习中的作用

学生对自己的数学能力持怀疑态度，这种心理障碍往往与认识方面的原因交织在一起。因为学习中困难过多，必然会增加他们对于数学学习的恐惧心理。要建立学好数学的自信心，应让学生了解在五彩斑烂的自然界和社会生活中，经常都会遇到可以用数学解释的现象和可以用数学来解决的问题，要让学生认识到数学学习对国家建设、社会需要和个人前途的重大意义。在学习方法上要让学生学会用数学符号进行推理和计算，不仅要知其然而且要知其所以然，力戒死记硬背。自信可以克服消极、懒散、自卑等不良习惯。对于学习比较困难的同学，不仅要给以具体帮助，而且要为他们表现自己的能力、要为他们学习上获得新的进步和成绩提供机会，让他们在成功和胜利的亲身体验中增强自信心。

解 设所求的一元二次方程为 $x^2+px+q=0$ $(p、q\in C)$，

由命题(二)知：$-p=(2-i)+(1+i)=3$，

$q=(2-i)(1+i)=3+i$，

∴所求方程为 $x^2-3x+(3+i)=0$ 。

3. 实根的判断方法

在复系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中，若 $a、b、c$ 不全是实数，不能用 $\Delta=b^2-4ac$ 与 0 的关系判断实根的情况，因为一方面 b^2-4ac 未必是实数，无法比较它与 0 的大小，另一方面既使 $\Delta=b^2-4ac$ 是实数，求根公式中的 a,b 可能是虚数。

如方程 $x^2+6ix-9=0$，$\Delta=(6i)^2-4\times(-9)\times1=0$，但此方程不仅没有两个相等的实数根，连实根都没有，而是 $x=\dfrac{-6i\pm0}{2}=-3i$，那么怎么判断复系数一元二次方程的实根情况呢？

命题(三)：方程 $x^2+(a+bi)x+(c+di)=0$，$(a、b、c、d\in R)$有两个实数根的充要条件是 $b=d=0$，且 $a^2-4c\geqslant0$。

证明 充分性，显然。

必要性，设 $x_1、x_2$ 是方程 $x^2+(a+bi)x+(c+di)=0$ 的两个实根

由命题(二)知：$\begin{cases}x_1+x_2=-(a+bi)\in R\\ x_1\cdot x_2=(c+di)\in R\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=0\\ d=0\end{cases}$

此时方程为 $x^2+ax+c=0$，它有两个实数根⇒ $a^2-4c\geqslant0$。

推论：虚系数一元二次方程不可能有两个实数。

命题(四)：方程 $x^2+(a+bi)x+(c+di)=0$，$(a、b、c、d\in R)$只有一个实数根的充要条件是 $b\neq0$，$d^2+b^2c-abd=0$。

证明 必要性：设实根为 x_0，于是

$x_0^2+(a+bi)x_0+(c+di)=0$，

即 $(x_0^2+ax_0+c)+(bx_0+d)i=0$，于是

$$\begin{cases}x_0^2+ax_0+c=0 & ①\\ bx_0+d=0, & ②\end{cases}$$

对于②，若 $b=0$，则 $d=0$，原方程为 $x^2+ax+c=0$，它要么没有实数根，要么有两个实根，因此原方程不可能只有一个实根，于是 $b\neq0$ ∴$x_0=-\dfrac{d}{b}$ ③

③代入①，即$(-\dfrac{d}{b})^2+a\cdot(-\dfrac{d}{b})+c=0$，于是 $d^2+b^2c-abd=0$。

充分性：∵$b\neq0$，$d^2+b^2c-abd=0$，

∴$(-\dfrac{d}{b})^2+a\cdot(-\dfrac{d}{b})+c=0$，

即：$x=-\dfrac{d}{b}$是方程 $x^2+ax+c=0$ 的解，这相当于原方程$(x^2+ax+c)+(bx+d)i=0$ 中实部为 0，又 $x=-\dfrac{d}{b}$，即 $bx+d=0$，

∴原方程中虚部为 0，这样 $x=-\dfrac{d}{b}\in R$ 是原方程的一实数根，

而 $b\neq0$，由命题(三)的推论知，原方程不可能有两个实数根，∴$b\neq0$，$d^2+b^2c-abd=0$ 时，原方程只有一个实数根。

由命题(四)的必要性证明中可得出：

推论：若 $b=0$，但 $d\neq0$，则方程 $x^2+(a+bi)x+(c+di)=0$，$(a、b、c、d\in R)$，没有实数根。

例 3 判断下列方程实数根有几个：

(1)$x^2+(2+3i)x+(1+3i)=0$；

(2)$x^2+(2i-1)x-(7+i)=0$；

(3)$x^2+4x+(6-i)=0$。

解 由命题(三)推论知，这三个方程都不能有两个实数根。

(1)∵$a=2$，$b=3\neq0$，$c=1$，$d=3$，而 $d^2-abd+b^2c=0$，

∴由命题(四)知此方程只有一个实数根。

(2)∵$a=-1$，$b=2\neq0$，$c=-7$，$d=-1$，而 $d^2-abd+b^2c=-29\neq0$，

∴由命题(四)知此方程没有实数根。

(3)∵$b=0$，而 $d=-1\neq0$， ∴由命题(四)推论知此方程没有实数根。

例 4 若关于 x 的方程 $x^2-(2i-1)x+(3m-i)=0$ 至少有一个实数根，求实数 m。

解 由命题(三)推论知，此方程不可能有两个实根，依题意，此方程只有一个实数根，由命题(四)

$d^2+b^2c-abd=0$，

即$(-1)^2\times(-2)^2\times(3m-1)\times(-2)\times(-1)=0$，

∴$m=1/12$。

对于一般的复系数一元二次方程 $a'x^2+b'x+c'=0$，$(a'、b'、c'\in C$ 且 $a'\neq0)$总可以化成 $x^2+(a+bi)x+(c+di)=0$，$(a、b、c、d\in R)$的形式，因此都可以由命题(三)、(四)及其推论来判断实数根的情况。